

THESE

présentée devant

L'UNIVERSITE DE NANCY I

pour obtenir le titre de

DOCTEUR INGENIEUR

par

Paul JOATHON

Ingénieur Civil des Mines

**Représentation d'une série sédimentaire
par un modèle probabiliste**

**Application aux processus d'ambarzoumian
et étude de la structure de CHEMERY**

Soutenue le 24 Juin 1971 devant la commission d'examen

Président : M. le Professeur

F. DAVOINE

Examineurs : MM. les Professeurs

G. MATHERON

J. HILLY

Invité : Monsieur

R. PELET

大
疑
則
大
進

小
疑
則
小
進

不
疑
則
不
進

孔
子

T H E S E

présentée devant

L'UNIVERSITE DE NANCY I

pour obtenir le titre de

DOCTEUR INGENIEUR

par

Paul J O A T H O N

Ingénieur Civil des Mines

REPRESENTATION D'UNE SERIE SEDIMENTAIRE
PAR UN MODELE PROBABILISTE

APPLICATION AUX PROCESSUS D'AMBARZOUMIAN
ET ETUDE DE LA STRUCTURE DE CHEMERY

=====

Soutenue le 24 Juin 1971 devant la commission d'examen

Président : M. le Professeur

F. DAVOINE

Examineurs : MM. les Professeurs

G. MATHERON

J. HILLY

Invité : Monsieur

R. PELET

N° d'enregistrement au Centre de Documentation du C.N.R.S.

AO 5805



NOM DE L'ETUDIANT : JOATHON Paul

Nature de la thèse : DOCTEUR INGENIEUR

Vu, Approuvé

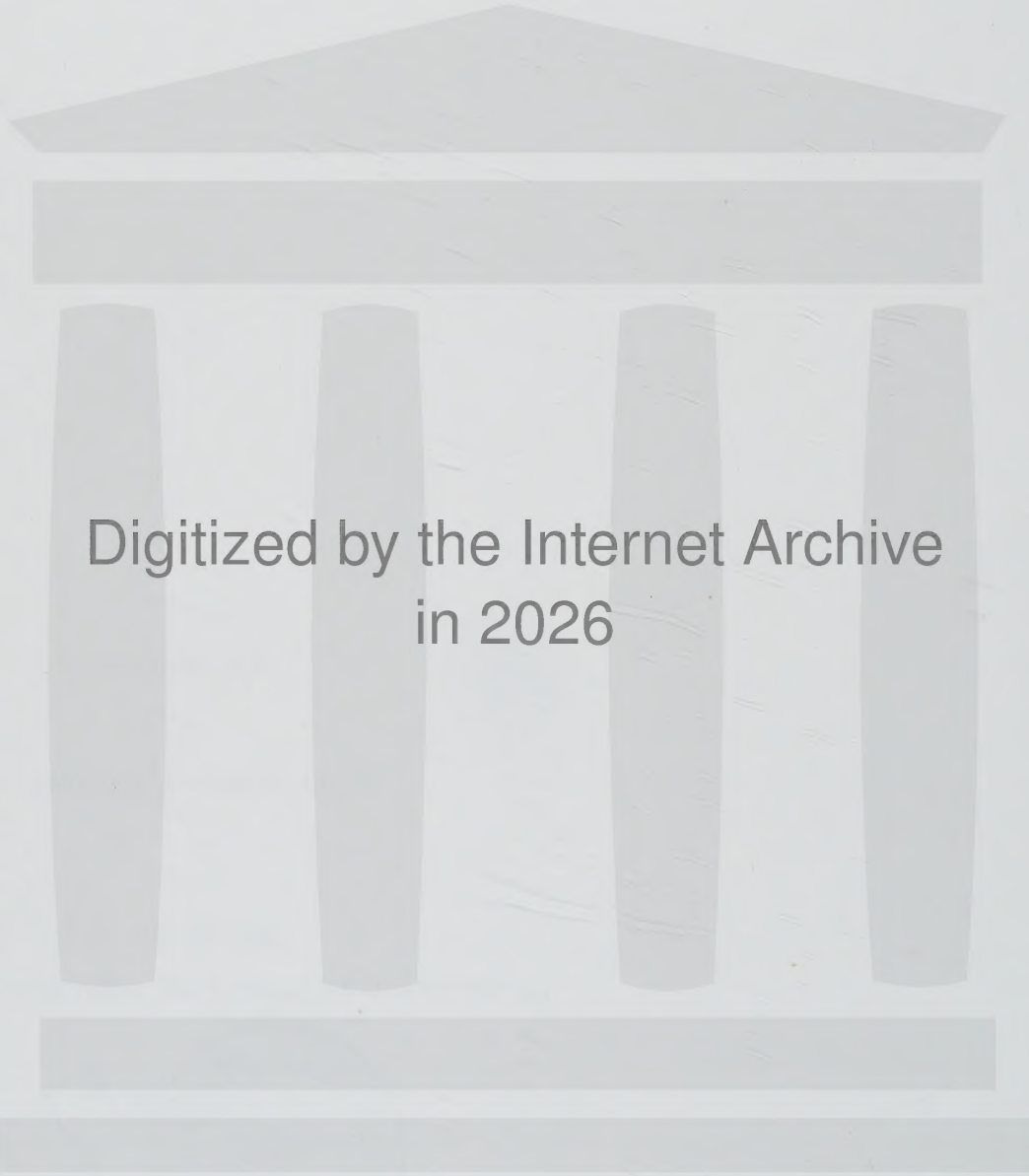
et permis d'imprimer

NANCY, le 21.5.71

Le Président du Conseil de l'Université de NANCY I



J.R. HELLUY



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551918_0024

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont permis d'effectuer ce travail dans les conditions les meilleures :

Monsieur G. MATHERON, qui en est à l'origine et qui m'a constamment fait bénéficier de ses conseils et de ses remarques bienveillantes.

J. JACOD avec qui j'ai collaboré pendant deux ans pour mener à bien cette étude.

Tous ceux qui, à l'Institut Français du Pétrole se sont intéressés à cette étude et l'ont suivie, en particulier Messieurs SALLE et PELET.

La Direction des Etudes et Techniques Nouvelles de Gaz de France qui a donné l'occasion de tester les modèles sur un cas réel en fournissant les données de la structure de Chemery.

Tous ceux qui, au Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau, ont facilité mon travail, en particulier J. SERRA dont les conseils et les encouragements furent appréciables.

Monsieur F. DAVOINE a bien voulu patronner ce travail et Messieurs C. CHAMBON et J. HILLY ont accepté de participer à mon jury. Qu'ils soient assurés de mes remerciements les plus sincères.

ARTICLES COMPLEMENTAIRES

- "The use of random-genetic models in the study of Sedimentary processes" par J. JACOD et P. JOATHON (J. Int. Ass. Math. Geol., 3, 3, (1971))

Cet article constitue une présentation des modèles aléatoires génétiques. Il en donne les principales propriétés ainsi que trois exemples d'utilisation avec des simulations à deux dimensions.

- "Estimation des paramètres dans les modèles aléatoires-génétiques représentant des processus de sédimentation" par J. JACOD et P. JOATHON (Revue I.F.P. - Octobre 1970)

Cet article traite de la possibilité théorique de procéder à l'estimation des paramètres et met en évidence les erreurs d'estimation.

INTRODUCTION	1
PREMIERE PARTIE	3
"Estimation des caractéristiques d'une série sédimentaire"	
Notions de stationnarité et d'ergodicité d'un processus - Vérification des principales hypo- thèses (stationnarité et dépendance des couches successives) - Les erreurs d'estimation.	
DEUXIEME PARTIE	19
"Les Modèles Aléatoires Génétiques"	
Présentation des processus d'Ambarzoumian - Mise en évidence des erreurs d'estimation et des difficultés d'interprétation des données sur un cas particulier	
TROISIEME PARTIE	49
"Etude de la structure de Contres"	
Présentation de la structure de Contres - Etude statistique des données - Introduction et étude d'un modèle aléatoire génétiques pouvant représenter cette structure - Estima- tion des données - Simulation du modèle sur une verticale	
CONCLUSIONS	80
BIBLIOGRAPHIE	82

INTRODUCTION

Le principe fondamental de l'utilisation de modèles probabilistes pour la représentation des phénomènes naturels, est l'interprétation de la réalité comme une réalisation d'une fonction aléatoire.

Si le passage de la fonction aléatoire, sa loi spatiale étant connue, à une réalisation, est possible, la démarche inverse ne l'est pas, du moins dans le cas général. En effet, pas plus que la donnée d'une valeur particulière prise par une variable aléatoire ne peut la définir, même si on connaît la forme de sa loi, la donnée d'une seule de ses réalisations ne peut définir une fonction aléatoire.

Néanmoins, dans le cas particulier où la fonction aléatoire est stationnaire, l'inférence statistique devient possible.

On cherchera donc à représenter le phénomène naturel étudié par une fonction aléatoire stationnaire. Deux conditions sont alors requises :

- d'une part, les modèles envisagés doivent admettre un régime stationnaire,

- d'autre part, le phénomène étudié doit présenter un caractère d'homogénéité, de régularité et de répétitivité suffisant pour pouvoir être représenté par une fonction aléatoire stationnaire.

Dans cette étude, le phénomène naturel étudié est une série sédimentaire constituée par la succession d'un nombre fini, et en général assez réduit, de couches discernables les unes des autres.

D'une façon générale, la démarche est la suivante :

Des considérations d'ordre géologique permettent d'envisager l'application d'un certain type de modèle. Ce modèle peut être étudié théoriquement et on peut déterminer les principales propriétés de la série sédimentaire qu'il engendre ; on peut également calculer les moments de cette série sédimentaire en fonction des paramètres du modèle. Si les propriétés de la série sédimentaire réelle coïncident avec celles de la série sédimentaire engendrée par le modèle, on peut envisager de représenter le phénomène par ce modèle. Il se pose alors le problème de l'estimation

des paramètres du modèle à partir des caractéristiques de la série sédimentaire observée.

Dans le cas où l'hypothèse de stationnarité de la série sédimentaire - du point de vue de la puissance des couches - est admissible, on peut calculer des estimateurs de ses moments. On a d'autre part des relations entre ces moments et les paramètres du modèle. Si on a autant d'estimateurs de moments que de paramètres, ces derniers peuvent alors être estimés, avec toutefois des erreurs plus ou moins grandes dûes à l'imprécision avec laquelle on connaît les estimateurs des moments ; en effet, ces estimateurs sont entaché de deux types d'erreurs :

Un premier type d'erreur provient de ce que les estimations sont faites à partir d'un nombre N de couches. On ne peut pas calculer cette erreur mais on peut en donner une variance d'estimation.

Un second type d'erreur provient de ce que, même si l'hypothèse de stationnarité de la série sédimentaire est admissible, il se peut qu'il y ait une légère dérive. L'estimation de la dérive donne une estimation de cette erreur.

Dans la première partie de ce texte, on étudie les différents problèmes posés par l'estimation des caractéristiques d'une série sédimentaire dans le cas le plus général.

Dans la seconde partie, on introduit les modèles aléatoires génétiques et, sur un cas simple on met en évidence les problèmes posés par l'estimation.

Dans la troisième partie, un modèle aléatoire génétique est appliqué à la structure de Contres, en se limitant à l'étude sur une verticale.

PREMIERE PARTIE : ESTIMATION DES CARACTERISTIQUES

D'UNE SERIE SEDIMENTAIRE

1 - STATIONNARITE ET ERGODICITE

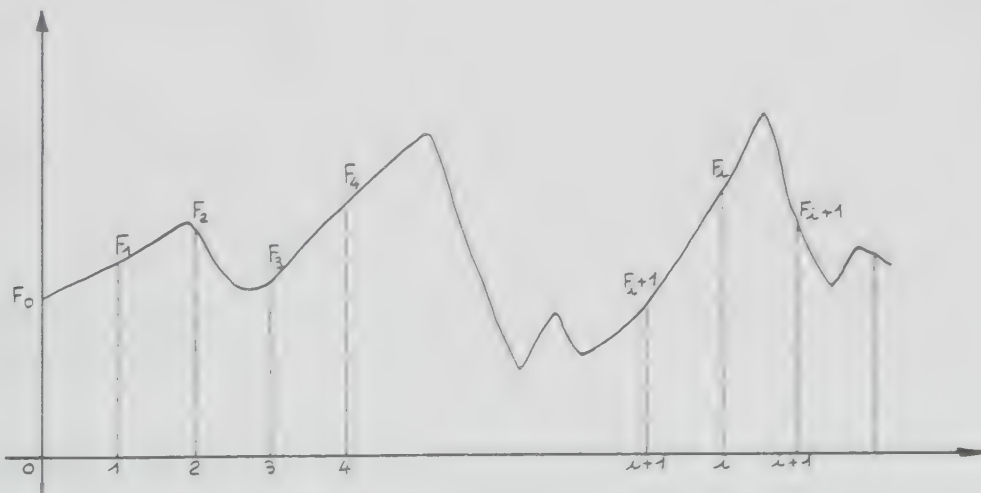
Soit une fonction aléatoire $\mathcal{F}$ considérée comme une famille infinie de variables aléatoires (f_i) . $\mathcal{F} = (f_0, f_1, \dots, f_i, \dots)$.

Cette fonction aléatoire est ergodique si, pour toutes les valeurs de l'indice i , la loi de la variable aléatoire (f_i) ne dépend pas des conditions initiales (f_0) . Elle admet un régime stationnaire si, quels que soient les indices i et j , les variables aléatoires (f_i) et (f_j) suivent une même loi. En particulier leurs moments sont les mêmes et ne dépendent pas de i . L'ergodicité entraîne la stationnarité.

Intuitivement, cela signifie que la fonction aléatoire se reproduit identiquement à elle-même le long de l'axe des i .

Soit alors une réalisation d'une fonction aléatoire. Cela signifie que l'on connaît des valeurs particulières F_i prises par les variables aléatoires (f_i) :

Fig. 1



Si la fonction aléatoire $\mathcal{F}$ est stationnaire, les F_i sont des valeurs prises par des variables aléatoires (f_i) de même loi ϕ , on peut donc, à partir de ces F_i estimer les moments de la loi ϕ qui est la loi stationnaire de la fonction aléatoire : en effet, on dispose alors d'un certain nombre de valeur particulière prise par une variable aléatoire - et non

d'une seule - Remarquons que la stationnarité suffit à rendre possible l'inférence statistique.

Notons que, si les conditions initiales du processus, c'est-à-dire ici la valeur F_0 , étaient tirées dans la loi stationnaire φ , la fonction aléatoire serait stationnaire dès le début. En fait ces conditions initiales sont à la fois inconnues et parfaitement fixées. Pour s'en défaire la condition d'ergodicité de la fonction aléatoire est donc nécessaire, au moins à partir d'un certain rang j .

2 - LES ERREURS D'ESTIMATION

Le point de départ est une série sédimentaire constituée de N couches de puissances successives $S_{k_1}, \dots, S_{k_1}, \dots, S_{k_N}$.

On fait l'hypothèse que cette famille (S_{k_i}) est une partie d'une réalisation d'une fonction aléatoire stationnaireⁱ:

$$\mathcal{F} = \{f_0, \dots, f_j, \dots\}$$

qui admet des moments que l'on note m_i et m_{ij} selon qu'ils ne sont pas ou qu'ils sont croisés - En régime stationnaire ces moments ne dépendent pas de i , pour les premiers :

$$m_i = m$$

ou ne dépendent que de $k = i-j$, pour les seconds :

$$m_{i-j} = m_k$$

Intéressons-nous, par exemple, à l'espérance mathématique m de la puissance des couches.

L'observation de la série sédimentaire nous indique - on verra ci-dessous comment - si on peut considérer qu'elle appartient à une réalisation d'une fonction aléatoire stationnaire.

Si c'est le cas, on estimera m par la moyenne arithmétique A_N des S_j

$$m^* = A_N = \frac{\sum_{j=1}^N S_j}{N}$$

qui, en régime stationnaire est bien un estimateur. En effet, son espé-

rance mathématique est :

$$E[A_N] = \frac{\sum E[S_i]}{N} = \frac{N m}{N} = m$$

C'est même un estimateur sans biais.

En remplaçant m par m^* , on commet toutefois une erreur due au fait que cette estimation se fait à partir de N couches. Il est intuitif que cette erreur, que nous dirons "du premier type" et que nous ne pouvons pas calculer exactement, est inversement proportionnelle au nombre N de couches.

En fait, en agissant de cette façon, on risque fort de commettre une autre erreur - erreur de second type - due au fait que, même si on a accepté l'hypothèse de stationnarité, il se peut qu'il y ait une légère dérive, c'est-à-dire que l'on n'ait pas, la puissance S_i de la i ème couche étant considérée comme une variable aléatoire, $E[S_i] = m$, mais que l'on ait quelque chose de la forme :

$$E[S_i] = a_N + b_N(i)$$

L'erreur de second type commise en estimant m par

$$A'_N = \frac{\sum E[S_i]}{N} \text{ peut se calculer, elle est égale à :}$$

$$\frac{1}{N} \sum_i b_N(i)$$

3 - VERIFICATION DE L'HYPOTHESE DE STATIONNARITE DE LA SERIE SEDIMENTAIRE

En toute rigueur, on ne peut parler de série sédimentaire stationnaire qu'après avoir vérifié que tous les moments sont eux même stationnaires.

En fait, pour les applications aux modèles décrits dans la seconde partie, on se contente de vérifier que la succession des puissance des couches ne présente pas de dérive.

Pour cela, on estime la dérive et on teste si elle est significativement différente de zéro. Comme on travaille sur un nombre assez faible de couches, c'est-à-dire que l'on commettra des erreurs importantes, il est inutile de chercher à estimer cette dérive $M_i = E[S_i]$ de façon précise, en fait on peut se contenter de l'estimation par moindres carrés, la dérive

sera donc estimer sous la forme :

$$M_i^* = S_{iN} + 2 a_N i$$

avec : $S_{iN} = M^* - (N-1) a_N$

où :
$$a_N = \frac{\sum_{i=1}^N (S_{iN} - M^*) (2i - N + 1)}{\sum_{i=1}^N (2i - N + 1)^2}$$

et M^* est la moyenne arithmétique des puissances des couches.

Le test doit porter sur la nullité de la pente a_N de la droite de régression.

Les variables aléatoires (S_i) n'ayant aucune raison d'être normales, on ne peut pas, en toute rigueur, tester la nullité de a_N selon les méthodes classiques de la statistique gaussienne (Test de Snédecor)

Toutefois, pour avoir une idée de la validité de l'hypothèse de stationnarité, on peut procéder de la façon suivante :

Supposons que la pente de la droite des moindres carrés soit nulle, c'est à dire que pour tout i :

$$E[S_i] = E[S]$$

Dans ces conditions, on peut calculer un ordre de grandeur de la variance d'estimation de a_N , a_N étant considérée comme une variable aléatoire de moyenne nulle :

a_N peut s'écrire :

$$a_N = \frac{\sum_{i=1}^N i S_i - \frac{N(N+1)}{2} E[S]}{\sum_{i=1}^N i^2 - \frac{N(N+1)^2}{4}}$$

et la variance d'estimation cherchée est :

$$\sigma^2(a_N) = E[a_N^2] = \frac{12^2}{N^2(N+1)^2 (N-1)^2} E\left\{\left[\sum_{i=1}^N i S_i - \frac{N(N+1)}{2} E(S)\right]^2\right\}$$

Si, en première approximation, on suppose que les variables aléatoires (S_i) sont indépendantes, il vient que :

$$\sigma^2(a_N) = \frac{12^2}{N^2 (N+1)^2 (N-1)^2} \left[E\{(\sum_i s_i)^2\} - E^2(\sum_i s_i) \right]$$

soit, comme on a :

$$E[(\sum_i s_i)^2] = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} E[s^2] - (\sum_i \sum_{j>i} 1)^2 E[s]$$

$$E[\sum_i s_i] = \frac{N(N+1)}{2} E[s]$$

$$\text{et } \sum_i \sum_{j>i} 1 = \frac{N(N-1)(N+1)(3N+2)}{24}$$

$$\sigma^2_{a_N} = \frac{12^2}{N^2 (N+1)^2 (N-1)^2} \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \{E[s^2] - E^2(s)\}$$

qui donne finalement

$$\sigma^2_{a_N} = \frac{24 (2N+1)}{N(N+1) (N-1)^2} \sigma^2_s$$

L'étude de la série sédimentaire nous donne un ordre de grandeur de σ^2_s et par suite on a un ordre de grandeur de $\sigma^2_{a_N}$ c'est-à-dire, en en prenant la racine, de l'écart moyen entre zéro et la pente estimée a_N de la droite de régression, ceci dans le cas où la série sédimentaire est stationnaire.

Dans ces conditions, on comparera cet écart moyen avec la pente estimée expérimentalement de la droite de régression : si les ordres de grandeur sont les mêmes, ou si la pente expérimentale est bien plus faible que l'écart moyen, on pourra faire l'hypothèse de stationnarité, sinon on ne pourra pas.

Prenons l'exemple suivant : (tiré de [7]).

Une série sédimentaire est constituée de 43 couches dont la puissance moyenne est 1,11 m et la variance 2,68. La droite de régression calculée par les moindres carrés a pour équation $1,82 - 0.032 i$.

Un ordre de grandeur de la variance $\sigma^2_{a_N}$ dans l'hypothèse où la pente est nulle est :

$\sigma_N^2 \approx 2,5 \cdot 10^{-2}$ et l'écart moyen est du même ordre ($2,5 \cdot 10^{-2}$) que la perturbation expérimentale trouvée.

Cette perturbation est donc négligeable.

4 - INDEPENDANCE DES PUISSANCES DES COUCHES SUCCESSIVES

Si on a affaire à des couches dont les puissances successives sont indépendantes les unes des autres et si on n'a pas de raison impérieuse d'appliquer un modèle très évolué, la représentation la plus simple de la série sédimentaire consiste bien à empiler les unes sur les autres des couches de puissances déterminées dans une loi que l'on détermine par ses moments généraux. Les deux premiers moments sont les problèmes d'estimation sont extrêmement réduits car on a pu choisir un modèle très simple.

On verra par la suite, que, même si on veut appliquer un modèle aléatoire génétique, le travail d'estimation est extrêmement simplifié si, a priori, on sait que les puissances des couches successives sont indépendantes.

Deux types de méthodes permettant d'étudier facilement cette indépendance, les premières s'appliquent à la série sédimentaire elle-même, les secondes à ses projections.

4-1. Etude directe de la série sédimentaire

4-1-1. Test de l'indépendance des puissances des couches de la médiane.
Référence - [2].

Etant donnée la succession des puissances $S_1, \dots, S_i$, on en considère la médiane S_K . Il y a donc autant de valeurs S_i inférieures à S_K que de valeurs supérieures, à condition de négliger les observations de valeurs S_K lorsque K est impair.

La succession des puissances peut être coupée en un certain nombre de séquences, chaque séquence étant formée de couches consécutives situées toutes au dessus, ou toutes au dessous, de la médiane. Soit V le nombre de ces séquences. On montre - Référence [2] - que les deux premiers moments de V sont :

$$E(V) = 1+m \text{ et } \sigma^2(V) = \frac{m(m-1)}{2m-1}$$

Le m est élevé (supérieur à 1) la variable réduite $\frac{V-E(V)}{\sqrt{\sigma^2(V)}}$

est normale. Si m est faible, cette variable aléatoire suit une loi tabulée par SWED et EISENHORT - Référence [3].

Les tests s'en déduisent immédiatement.

4-1-2. Test du nombre de points critiques

Si on représente la succession des puissance de la façon suivante :

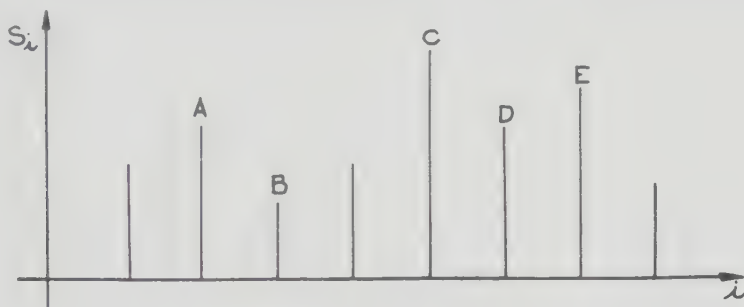


Fig. 2

on appelle points critiques les points A, B, C, D et E, c'est-à-dire les points encadrés par deux couches de puissance plus faible toutes deux ou plus fortes toutes deux.

On démontre - Référence [2] - que si N observations successives sont indépendantes, le nombre k de points critiques suit une loi dont les deux premiers moments sont

$$E[k] = \frac{2}{3} (N-2)$$

$$\sigma^2(k) = \frac{16}{90} \frac{N-29}{N}$$

et qui tend rapidement vers la loi normale.

4-2. Définition du demi-variogramme

En géostatistique, on définit le demi-variogramme $\gamma(h)$ d'une fonction aléatoire $Z(x)$ stationnaire d'ordre 2 - c'est-à-dire telle que la variable aléatoire $Z(x_0)$ admette une espérance mathématique m indépendante de x_0 et telle que la covariance $K(h) = E[Z(x_0+h) Z(x_0)] - m^2$ existe et soit indépendante de x_0 - par :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E\{[Z(x+h) - Z(x)]^2\}$$

alors on a :

$\gamma(h) = K(0) - K(h)$, $K(0)$ étant la variance a priori qui, pour les fonctions aléatoires qui nous intéressent nous, existe toujours.

On montre que le demi-variogramme est symétrique, qu'il est positif ou nul, et qu'il prend la valeur zéro pour h nul.

En géostatistique, le demi-variogramme, généralement continu, donne des renseignements sur la régularité de la fonction aléatoire ainsi que sur les échelles des structures.

Dans le cas qui nous intéresse, le demi-variogramme est défini de la façon suivante :

A la couche de rang i , on associe sa puissance $\mathcal{S}_i$ et on pose, pour toutes les valeurs entières de m :

$$\gamma_i(m) = \frac{1}{2} E[(\mathcal{S}_i - \mathcal{S}_{i+m})^2]$$

Dans le cas stationnaire, ce demi-variogramme s'écrit (en développant

$$\gamma(m) = E[\mathcal{S}^2] - E[\mathcal{S} \cdot \mathcal{S}_{i+m}] \text{ qui ne dépend plus de } i.$$

La fonction $\gamma(m)$ est donc définie pour tous les entiers et son graphe est constitué des points d'abscisse m et d'ordonnée $\gamma(m)$. On a toujours $\gamma(m) \geq 0$ et $\gamma(0) = 0$.

La valeur du demi-variogramme pour le pas m nous donne une idée du degré d'indépendance de deux couches quelconques distantes de m .

En effet, si deux couches distantes de m ont des puissances indépendantes, $\gamma(m)$ devient :

$$\gamma(m) = E[\mathcal{S}^2] - E^2[\mathcal{S}], \text{ c'est-à-dire que } \gamma(m) \text{ est égal à la variance } \sigma^2 \text{ de la puissance des couches.}$$

Réciproquement, lorsque $\gamma(m)$ sera proche de la variance, on pourra considérer que les puissances de deux couches sont indépendantes les unes des autres.

En particulier, si, à partir de $m = 1$, $\gamma(m)$ est égal (théoriquement) ou presque égal (pratiquement) à la variance, on pourra considérer que la série sédimentaire est constituée de couches dont les puissances sont indépendantes les unes des autres.

4-3. Test d'indépendance des puissances successives des couches

Un test, proposé par COX et LEWIS - Référence [1] - porte sur les coefficients de corrélation ρ_n définis par

$$\rho_m = \frac{E[(S_i - E(S))(S_{i+m} - E(S))]}{\sigma_S^2}$$

S'il y a indépendance entre les S_i , c'est-à-dire si les ρ_m peuvent être considérées comme des variables aléatoires de moyenne nulle, alors les quantités $\rho_m \sqrt{(n-1)}$ suivent la loi normale réduite, ceci à condition que le nombre n de couches soit grand.

Pratiquement, si on dispose du demi-variogramme - on verra ci-dessous pourquoi on a intérêt à connaître une estimation du demi-variogramme - on remarque que la covariance qui apparaît en numérateur de ρ_m est égale à $\gamma(m) - \sigma_S^2$; on se ramène donc aisément à un test sur le demi-variogramme.

5 - CHOIX DES QUANTITES A ESTIMER

Lors de l'étude théorique du modèle, on calculera les différents moments de la série sédimentaire résultante en fonction des paramètres. Inversement, les paramètres du modèle que l'on entendra utiliser pour représenter une série sédimentaire donnée seront déterminés à partir des moments expérimentaux estimés à partir de cette série sédimentaire.

Il nous faudra donc connaître au moins autant de moments expérimentaux que de paramètres à estimer, les moments en sur-nombre fourniront des relations supplémentaires entre les paramètres qui peuvent servir à tester la validité du modèle.

Un premier type de relations est fournit par l'étude de la succession des faciès, nous ne nous y intéressons pas ici.

Les autres relations dépendent de la succession des puissances des couches. Nous nous en tiendrons aux trois quantités que, dans la majorité des cas seront suffisantes :

- La puissance moyenne des couches
- Le moment d'ordre deux des puissances des couches
- Le demi-variogramme

Ce dernier nous donnant autant de relations que l'on peut calculer de valeurs $\gamma(m)$ mais également dans la mesure où on constate une convergence des valeurs calculées, une seconde estimation de la variance σ_S^2 , la première étant fournie par les deux premiers moments.

Comme nous l'avons dit ci-dessus, en estimant ces quantités on commet des erreurs de deux types que l'on peut évaluer.

6 - LES ERREURS DU PREMIER TYPE

Nous nous plaçons dans le cas où l'hypothèse de stationnarité de la série sédimentaire est vérifiée : les moments de la puissance de la lère couche, S_i , considéré comme une variable aléatoire, ne dépendent pas du rang i .

On ne peut pas calculer l'erreur d'estimation due au fait que l'on calcule un estimateur à partir d'un nombre fini N de couches mais on peut en donner la variance que l'on appelle : variance d'estimation du moment considéré - D'une façon générale, on sait que la détermination de ces variances d'estimation nécessitera le calcul du moment d'ordre deux fois plus grand que le moment étudié.

6-1. Estimation de l'espérance mathématique de la puissance des couches

La quantité $M^* = \frac{\sum S_i}{N}$ est un estimateur de l'espérance mathématique $E[S] = p$.

Sa variance d'estimation est donc :

$$\sigma_p^2 = E[(M^* - p)^2] \text{ soit :}$$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N^2} E[(\sum (S_{i-p}))^2]$$

Si, en première approximation, ce que nous pouvons nous permettre car il s'agit ici d'un calcul d'erreur, nous supposons que les différentes puissances sont indépendantes les unes des autres, il vient que : la variance d'estimation est de l'ordre de $\frac{1}{N^2} E \sum (S_{i-p})^2$ soit, comme on est en régime stationnaire

$$\sigma_p^2 \sim \frac{\sigma_S^2}{N}$$

σ_S^2 étant la variance des puissance de la série sédimentaire dont on a un

estimateur : $\sum^2 = \frac{\sum s_i^2}{N} - \frac{(\sum s_i)^2}{N}$

6-2. Estimation du moment d'ordre deux de la puissance des couches

Le moment théorique $q = E[S^2]$ est estimé par $D^{2*} = \frac{\sum s_i^2}{N}$.

La variance d'estimation est alors $\sigma_q^2 = E[(D^{2*} - q)^2]$ qui se décompose en :

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{N^2} E[(\sum s_i^2 - q)^2] - \frac{1}{N^2} E[\sum_i \sum_{j>i} (s_i - q)(s_j - q)]$$

qui, avec la même approximation que ci-dessus est de l'ordre de :

$$\sigma_q^2 \sim \frac{\sigma_{S^2}^2}{N}$$

$\sigma_{S^2}^2$ est la variance des carrés des puissances des couches.

6-3. Estimation d'un point du demi-variogramme.

En régime stationnaire, la valeur théorique du demi-variogramme :

$\gamma(m) = E[S_i^2] - E[S_i S_{i+m}]$ ne dépend pas de m est on en a un estimateur :

$$\Gamma^*(m) = \frac{1}{2(N-m)} \sum_{i=1}^{N-m} (S_i - S_{i+m})^2$$

$\Gamma^*(m)$ peut être considéré comme une variable aléatoire d'espérance mathématique $\gamma(m)$ et la variance d'estimation du demi-variogramme pour le pas m est :

$$\sigma_{\gamma(m)}^2 = E[\Gamma^*(m) - \gamma(m)]^2$$

que l'on peut calculer :

$$\sigma_{\gamma(m)}^2 = \frac{1}{4(N-m)^2} E\left\{\left[\sum_{i=1}^{N-m} ((S_i - S_{i+m})^2 - E[(S_i - S_{i+m})^2])\right]^2\right\}$$

qui donne en développant

$$\sigma_{\gamma(m)}^2 = \frac{1}{4(N-m)^2} E\left[\sum_{i=1}^{N-m} [(S_i - S_{i+m})^2 - E(S_i - S_{i+m})^2]^2\right]$$

$$+ \frac{1}{2(N-m)^2} E \left[\sum_{i=1}^{N-m} \sum_{j>i} [(S_i - S_{i+m})^2 - E[(S_i - S_{i+m})^2]] [(S_j - S_{j+m})^2 - E[(S_j - S_{j+m})^2]] \right]$$

Si on pose $\alpha_i^m = (S_i - S_{i+m})^2$, le premier terme est égal à $\frac{1}{4(N-m)} \sigma_{\alpha_i^m}^2$ qui donne un ordre de grandeur de la variance d'estimation d'un point du demi-variogramme avec une approximation du même genre que celles faites ci-dessus mais qui ici ne porte pas sur l'indépendance des puissances mais sur celle des carrés des accroissements $S_i - S_{i+m}$. On a alors :

$$\sigma_{\gamma(m)}^2 \sim \frac{1}{4(N-m)} \sigma_{\alpha_i^m}^2$$

7 - LES ERREURS DU SECOND TYPE

Dans le cas où on emploie ces estimateurs en régime non exactement stationnaire, c'est-à-dire si on a décelé une légère dérive que l'on interprète comme indiquant que l'on ne se trouve pas assez loin du démarrage du processus, en plus des erreurs estimées ci-dessus, on en commet d'autres que l'on peut, théoriquement du moins, calculer exactement et pour lesquelles on peut trouver des variances d'estimation si on les calcule à partir d'une série sédimentaire.

Nous supposons que les différents moments étudiés s'écrivent respectivement en raison de la non stationnarité :

$$\begin{aligned} E[S_i] &= p + \alpha(i) \\ E[S_i^2] &= q + \beta(i) \\ \gamma_i(m) &= \gamma(m) + \delta_m(i) \end{aligned}$$

Les erreurs de second type seront respectivement :

$$\begin{aligned} \Delta_2^p &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha(i) \\ \Delta_2^q &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \beta(i) \\ \Delta_2^m &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_m(i) \end{aligned}$$

$\alpha(i)$, $\beta(i)$ et $\delta_m(i)$ sont connus théoriquement en fonction des paramètres du modèle. On calcule ces paramètres à l'aide des estimateurs p , q et $\gamma(m)$ et on en déduit les éventuelle erreurs de second type commises sur ces estimations. On a donc ainsi, a posteriori, une vérification de la validité du modèle et de l'hypothèse de stationnarité : si ces erreurs sont faibles, et si les variances d'estimation des moments le sont également on peut prendre en compte les paramètres calculés, sinon on ne peut appliquer le modèle avec l'hypothèse de stationnarité.

Les variances d'estimation des différents moments ne sont naturellement plus ce qui a été calculé ci-dessus, elles dépendent de $\alpha(i)$, $\beta(i)$ et $\delta_m(i)$.

On peut les calculer avec des approximations analogues à celles du cas stationnaire et on trouve en les notant σ'^2 :

$$\sigma_p'^2 = \sigma_p^2 + \frac{1}{N^2} \sum_1^N [\beta(i) - 2p \alpha(i)] + \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i} \alpha(i) \alpha(j)$$

$$\sigma_q'^2 = \sigma_q^2 + \frac{1}{N^2} \sum_1^N [F(i) - 2q \beta(i)] + \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^{W-1} \sum_{j>i} \beta(i) \beta(j)$$

si $F(i)$ est le terme "non stationnaire" du moment d'ordre 4 :

$$E[S_i^4] = E[S^4] + F(i)$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma(m)}'^2 = \sigma_{\gamma(m)}^2 + \frac{1}{4(N-m)^2} \sum_{i=1}^{N-m} [K(i) - 2\gamma(m) \delta_i(m)] \\ + \frac{1}{2(N-m)^2} \sum_{i=1}^{N-m} \sum_{j>i} \delta_i(m) \delta_j(m) \end{aligned}$$

$K(i)$ étant défini par :

$$E[\alpha_m^2(i)] = E[\alpha_m^2] + K(i)$$

avec :

$$\alpha_m(i) = (S_i - S_{i+m})^2$$

8 - CORRECTION DES ESTIMATEURS

Pratiquement, on ne peut pas utiliser les expressions théoriques des moments en régime non stationnaire. On connaît l'existence de la dérive grâce à son estimateur par moindres carrés :

$$E[S_n] = Y_n = X_N + a_n$$

et on prend comme estimateur de l'espérance mathématique des puissances des couches :

$P^* = \frac{1}{N} \sum_1^N Y_n$ que l'on peut considérer comme une variable aléatoire d'espérance mathématique :

$E(P^*) = P + \frac{a(N+1)}{2}$ P étant la puissance moyenne des couches en l'absence de dérive.

A partir de cet estimateur de la dérive, on peut calculer son influence sur les autres moments.

Si Q_0 est le moment d'ordre deux :

$$Q_0 = E[S_N^2] \text{ et si } Q_m \text{ est égal à :}$$

$Q_m = E[Q_n Q_{n+m}]$, ces deux moments sont estimés respectivement par :

$$Q_0^* = \frac{1}{N} \sum_1^N Y_n^2$$

et
$$Q_m^* = \frac{1}{N-m} \sum_1^{N-m} Y_n Y_{n+m}$$

qui peuvent être considérés comme des variables aléatoires d'espérances mathématiques respectives :

$$E(Q_0^*) = Q_0 + a(N-1)P + \frac{a^2}{6} (N-1)(2N+1)$$

et
$$E(Q_m^*) = Q_m + a(N+1)P + \frac{a^2}{6} (N-1)(2N+1) - Nm \frac{a^2}{6} - \frac{a^2 m^2}{6}$$

et avec des notations analogues, il vient que l'influence de la dérive sur le demi-variogramme se traduit par :

$$E[\gamma^*(m)] = \gamma(m) + \frac{a^2}{6} m(N+m)$$

Ces différents termes correcteurs, qui ne dépendent que de la puissance moyenne P des couches, de leur nombre total N et du pas m peuvent aisément être calculés.

Toutefois, comme ils dépendent étroitement de l'estimation de la dérive par la méthode des moindres carrés, cette correction ne sera acceptable que si les fluctuations de la dérive autour de son estimateur par moindre carré sont faibles, c'est-à-dire, pratiquement, si cette dérive est elle-même faible. Il est bien sûr évident que cette méthode ne constitue pas un moyen d'estimation des moments de la série sédimentaire en présence d'une dérive appréciable.

- METHODE D'ESTIMATION

Les différents moments dont les variances d'estimation sont données dans les deux paragraphes précédents servent en fait à estimer les paramètres du modèle.

Pratiquement, on agit donc de la façon suivante :

- des critères d'ordre géologique nous permettent d'envisager l'application d'un certain type de modèle : il s'agit principalement de choisir le mode de dépôt - lent ou instantané - et de subsidence.

- on calcule les caractéristiques du modèle en fonction de ses différents paramètres. A priori, on sait que le nombre de paramètres sera grand, plus il faudra recourir à des moments risquant d'être entachés d'erreurs pour les estimer. On cherchera également à avoir des relations permettant le contrôle de la validité du modèle.

- on étudie ensuite la stationnarité de la série sédimentaire, si on ne peut pas faire l'hypothèse d'absence de dérive, il faudra renoncer à estimer les paramètres du modèle du moins avec une précision acceptable.

- en l'absence de dérive on commencera par calculer l'erreur d'estimation du moment le plus simple : la puissance moyenne des couches, sa variance est $\frac{\sigma^2(S)}{N}$, rapport de la variance des couches à leur nombre. Si cette variance est faible on peut envisager une estimation assez fine des moments, donc des paramètres, sinon il faut renoncer.

Notons que cette opération peut être effectuée pour tous les moments : pour avoir une idée de la validité de l'utilisation d'une estimation d'un moment, il faudra calculer le moment d'ordre deux fois plus grand correspondant.

- même dans le cas où la dérive est négligeable, il se peut qu'elle ait une influence sur les valeurs estimées, on pourra effectuer une correction de dérive en particulier, comme on le verra ci-dessous sur le demi-variogramme.

- alors, on peut passer à l'estimation des paramètres à partir des moments, puis à la vérification de la validité du modèle, grâce aux relations supplémentaires, principalement grâce aux deux estimations de la variance des puissances des couches - calculée directement et comme valeur limite du demi-variogramme - et en estimant la profondeur moyenne à laquelle a lieu le dépôt, cette profondeur moyenne devant être compatible avec les hypothèses géologiques initiales.

L'objet de la partie suivante est l'application de ce qui précède à un type particulier de modèles : les modèles aléatoires génétiques où la profondeur pendant le dépôt est un processus d'Ambarzoumian.

DEUXIEME PARTIE

LES MODELES ALEATOIRES GENETIQUES

- PRESENTATION DES MODELES ALEATOIRES GENETIQUES

Ces modèles ont été introduits par Monsieur MATHERON - référence [4] - et ont été largement étudiés dans deux articles - références [5] et [6] -. Des cas particuliers en sont présentés dans différentes publications internes du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau.

L'idée directrice de ces modèles est de donner une représentation de la série sédimentaire sur une verticale qui puisse être étendue facilement à deux ou trois dimensions. Cette extension introduit des paramètres supplémentaires, mais également des relations supplémentaires pour les estimer. Ce qui suit s'en tient aux paramètres relatifs à l'étude sur une verticale.

L'hypothèse de base est que la profondeur à laquelle a lieu le dépôt constitue le facteur principal de la sédimentation et que la série sédimentaire résultante se déduit des variations de cette profondeur au cours du temps. Cette hypothèse est admissible dans la mesure où on suppose que, à grande échelle, le phénomène est relativement homogène et que les variations de la profondeur le long d'une verticale donnée, en l'absence de sédimentation aussi bien que lors d'un dépôt, correspondent à des variations de la distance de cette verticale à la source. On peut alors admettre que, à moins de se trouver très près de cette source, le dépôt sera d'autant plus important que la profondeur le sera également.

Les autres facteurs qui interviennent dans l'évolution du dépôt sont naturellement nombreux: vitesse du courant, déplacement des chéneaux, vagues, etc... et très liés les uns aux autres. On n'en retient toutefois que deux : la subsidence, qui traduit les variations du niveau de la mer par rapport à un point fixe et le taux de sédimentation. Ce dernier tient compte de tous les facteurs autres que la profondeur, qui font que, en un point et à un instant donnés, on a plus ou moins de dépôt.

Il est évident que ces facteurs ne peuvent pas être déterminés exactement : ce ne sont pas des fonctions du temps que l'on peut calculer car trop de facteurs élémentaires y interviennent. On les considérera donc comme des fonctions aléatoires indépendantes l'une de l'autre.

Avec ces hypothèses, si on note Y_t la profondeur à l'instant t le long de la verticale étudiée, H_t la subsidence et X_t le taux de sédimentation, pendant le temps dt , la subsidence provoquera une augmentation de la profondeur égale à dH_t et il se déposera une épaisseur $Y_t dX_t$ de sédiment. L'équation d'évolution de la profondeur sera donc :

$$dY_t = dH_t - Y_t dX_t$$

Cette équation est largement étudiée dans [4] ainsi que dans les articles [5] et [6]. Disons simplement que, si H_t et X_t sont des processus à accroissement positifs, stationnaires et indépendants, Y_t est un processus d'Ambarzoumian. C'est un processus markovien qui admet un régime ergodique lorsque t tend vers l'infini.

La subsidence et le taux de sédimentation peuvent évoluer de deux façons différentes : continuellement en fonction du temps ou par saccades. Une variation continue pour H_t signifie que le niveau de la mer s'élève régulièrement pendant le processus de sédimentation, pour X_t elle signifie que le dépôt a lieu de façon continue. Des variations saccadées de la subsidence correspondent au contraire à un changement brusque du niveau de l'eau, pour le taux de variation, elles signifient que le dépôt a lieu de façon instantanée. Naturellement ces notions ne sont pas intégralement applicables physiquement, il n'existe ni sédimentation brutale ni variation instantanée du niveau de la mer. Il faut toutefois se placer à l'échelle du temps de dépôt dans un bassin, qui s'étend bien souvent sur des milliers d'années. Dans ces conditions, un phénomène notable qui ne dure que quelques années ou quelques dizaines d'années pourra être considéré comme instantané, on peut alors parler de sauts de la subsidence. De la même façon, on parlera de dépôt instantané lorsque, pendant une durée assez courte, à l'échelle du phénomène, toujours, le dépôt a lieu plus rapidement que d'habitude. Dix centimètres par an au lieu de 5 mm par siècle par exemple.

Les hypothèses génétiques interviennent donc, dans ces modèles, lors du choix des fonctions aléatoires X_t et H_t .

DESCRIPTION D'UN MODELE PARTICULIER SIMPLE

On envisage maintenant les hypothèses génétiques simples suivantes :

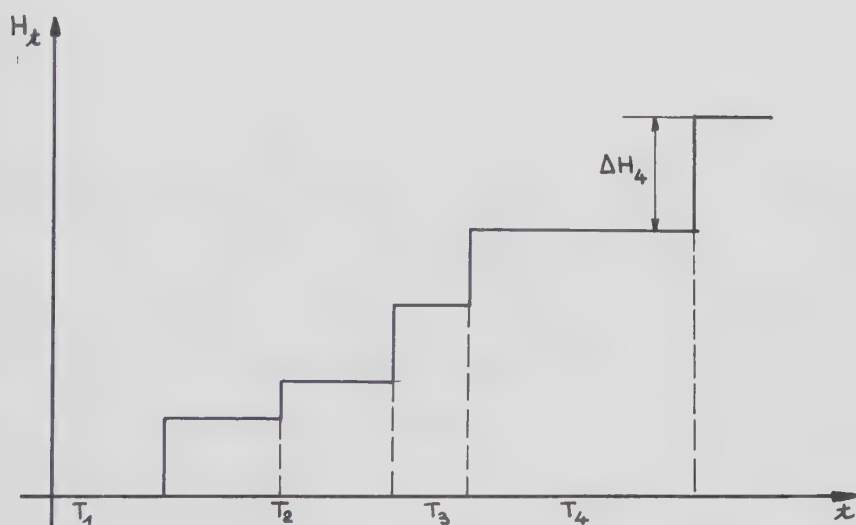
Tout au long du cycle de sédimentation, le niveau de la mer varie continuellement des sédiments. Ce dépôt est interrompu de temps en temps par une élévation brutale du niveau de la mer. Cette subsidence s'accompagne d'une variation

plus ou moins importante de la nature du dépôt : elle marque donc la séparation entre deux couches de sédiment.

Ces hypothèses correspondent donc à une fonction aléatoire X_t en fait fonction au sens classique du temps (on prendra la plus simple : $dX_t = at$ et à une fonction aléatoire H_t fonction de sauts. On prendra un processus du type suivant :

A des intervalles d'amplitude T_i de loi $F(t)$ (c'est-à-dire que l'on a : $P(T < t) = F(t)$) se produisent des sauts ΔH_i dont les amplitudes obéissent à la loi exponentielle de paramètre δ (on a : $P(\Delta H_i < u) = 1 - e^{-\delta u}$)

L'allure de la fonction aléatoire H_t est donc :



Lors du saut n° n de la subsidence, la profondeur passe donc de Y_n^- à $Y_n^t = Y_n^- + \Delta H_n$.

Entre les deux sauts n et n+1 la profondeur évolue selon :

$$Y_t = Y_n^t e^{-t}$$

t étant compté à partir de l'instant où se produit le saut du processus H_t .

La profondeur avant le saut n+1 est donc :

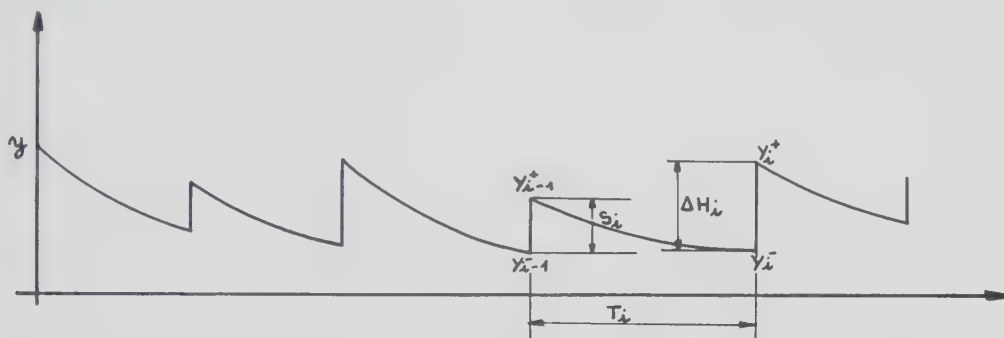
$Y_{n+1}^- = Y_n^t e^{-T_{n+1}}$ si l'amplitude de l'intervalle entre les sauts n et n+1 est T_n ;

Dans la suite on note $e^{-T_{n+1}} = \Pi_{n+1}$ et on prend comme paramètres pour déterminer Π_n ses moments d'ordre 1 et 2 : λ et μ (Ceci dans la mesure où on ne s'intéresse pas aux moments d'ordre supérieurs des quantités liées au modèle).

On note S_{n+1} la puissance de la couche qui se dépose pendant le temps T_{n+1} , cette puissance est donnée par :

$$S_{n+1} = Y_n^t (1 - \Pi_{n+1})$$

A partir d'une profondeur initiale y , on définit donc une série sédimentaire dont les couches ont pour puissances successives $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots$. Une réalisation de Y_t sera de la forme :



2-1. Ergodicité et stationnarité de la série sédimentaire

Comme noté ci-dessus - Référence [6] - on montre que le processus markovien Y_t admet un régime ergodique et stationnaire. Or, toute la première partie était basée non sur l'étude de la fonction aléatoire "profondeur" mais sur l'étude de la fonction aléatoire "Succession des puissances des couches".

Il est évident qu'une réalisation du processus Y_t défini une réalisation de la fonction aléatoire $\mathcal{F} = \{S_i \dots S_i, \dots\}$ la seule condition initiale dont la valeur y de la profondeur à l'instant 0. D'autre part, étant donnée la relation entre la puissance d'une couche et la profondeur, on voit que un moment m_i^k de la puissance d'une couche (n° i) est donné par :

$$m_i^k = m(Y_i^t) \quad m_i^k \{(1 - \Pi_{i+1})\}$$

c'est-à-dire le produit des moments correspondant de Y_i^* et $1 - \Pi_{i+1}$, ceci parce que les variables aléatoires Y_i^* et Π_{i+1} sont indépendantes.

Dans ces conditions, comme les variables aléatoires Π_i sont indépendantes

tes et de même loi, leurs moments ne dépendent pas du rang n , ni bien sûr des conditions initiales, et les propriétés ergodiques du processus Y_t se répercutent sur la fonction aléatoire $\mathcal{F}$.

Y_t admettant un régime ergodique et stationnaire la fonction aléatoire en admet également un.

2-2. Les moments de la série sédimentaire

Les calculs donnant ces moments sont, pour ce cas particulier, assez simples et ne sont pas reproduits dans leur intégralité ici. A l'instant $t = 0$, la profondeur est une constante y .

Moments d'ordre 1. Si r_n^- est l'espérance mathématique de la profondeur avant le $n^{\text{ième}}$ saut, r_n^+ l'espérance mathématique de la profondeur après et p_n l'espérance mathématique de la puissance de la $n^{\text{ième}}$ couche, on a :

$$E[Y_n^-] = r_n^- = \frac{\lambda}{\delta} \frac{1}{1-\lambda} + (y - \frac{1}{\delta(1-\lambda)})\lambda^n$$

$$E[Y_n^+] = r_n^+ = \frac{1}{\delta} \frac{1}{1-\lambda} + (y - \frac{1}{\delta(1-\lambda)})\lambda^n$$

$$E[S_n] = p_n = \frac{1}{\delta} + [y - \frac{1}{\delta(1-\lambda)}] \lambda^{n-1}(1-\lambda)$$

Moments d'ordre 2. Si s_n^- , s_n^+ et q_n sont les moments d'ordre deux correspondant, on trouve :

$$E[Y_n^{-2}] = s_n^- = \frac{2}{\delta^2} \frac{\mu}{(1-\lambda)(1-\mu)} + \left[\mu^n [y^2 - \frac{2}{\delta^2(1-\lambda)(1-\mu)}] + \frac{2\lambda\mu}{\delta} \frac{\lambda^{n-1}\mu^{n-1}}{\lambda-\mu} (y - \frac{1}{\delta(1-\lambda)}) \right]$$

$$E[Y_n^{+2}] = s_n^+ = \frac{2}{\delta^2} + s_n^- + \frac{2}{\delta} r_n^-$$

$$E[S_n^2] = q_n = s_{n-1}^+(1-2\lambda + \mu)$$

Demi-variogramme

Le demi-variogramme $\gamma(m)$ est défini par :

$$\gamma(m) = \frac{1}{2} E[(S_n - S_{n+m})^2]$$

qui s'écrit

$$\gamma_n(m) = \frac{1}{2} [E[(S_n)^2] + E[(S_{n+m})^2] - E[S_n S_{n+m}]]$$

$$\text{soit } \gamma_n(m) = \frac{1}{2} (q_n + q_{n+m}) - q_{nm}$$

$$\text{en notant } q_{nm} = E[S_n S_{n+m}]$$

Le moment croisé se calcule aisément et donne :

$$q_{nm} = \frac{p_n}{\delta} (1-\lambda^m) + \lambda^{m-1} (1-\lambda)(\lambda-\mu) s_n^+$$

Tous les termes intervenant dans cette expression étant connus, on pourrait écrire l'expression de $\gamma(m)$ dans le cas général.

2-3. Régime ergodique et stationnarité

Quelle que soit la profondeur initiale y , on remarque que si on s'intéresse à un Y_n^+ (ou à un Y_n^-) pour n très grand, les deux premiers moments r_n^+ et s_n^+ (ou r_n^- et s_n^-) ne dépendent, ni de n , ni de la profondeur initiale : en effet, λ et μ sont les deux premiers moments du facteur multiplicatif " e^{-T} ", qui prend des valeurs toujours inférieures à l'unité; λ et μ sont donc inférieurs à un et quand n tend vers l'infini λ^n et μ^n tendent vers zéro. Pour les moments suivants la propriété se conserve.

Ainsi, quand n tend vers l'infini, les fonctions aléatoires (Y_i^+) et (Y_i^-) deviennent ergodiques et stationnaires.

Cette tendance vers l'ergodicité a été étudiée dans [6].

On remarque également que les expressions des deux premiers moments de Y_n^+ et Y_n^- sont telles que, si la profondeur initiale était non pas une constante, mais une variable aléatoire de loi, la loi ergodique de Y_n^+ , (alors y serait remplacé dans les expressions des moments par $E[Y^{+2}]$, espérance mathématique en régime ergodique, et y^2 par $E[Y^{+2}]$, le régime ergodique est atteint dès le début du processus.

Ce cas n'est bien sûr pas exploitable car la profondeur initiale n'est pas une variable aléatoire mais une constante.

On parlera donc de régime stationnaire quand on se trouvera loin du début du processus.

En régime stationnaire les différents moments calculés ci-dessus deviennent :

$$\begin{aligned} r_n^- \rightarrow r^- &= \frac{1}{\delta} \frac{\lambda}{1-\lambda} & s_n^- \rightarrow s^- &= \frac{2}{\delta^2} \frac{\mu}{(1-\mu)(1-\lambda)} \\ r_n^+ \rightarrow r^+ &= \frac{1}{\delta} \frac{\lambda}{1-\lambda} & s_n^+ \rightarrow s^+ &= \frac{2}{\delta^2} \frac{1}{(1-\mu)(1-\lambda)} \\ p_n \rightarrow p &= \frac{1}{\delta} & q_n \rightarrow q &= \frac{2}{\delta^2} \frac{(1-2\lambda+\mu)}{(1-\mu)(1-\lambda)} \end{aligned}$$

de plus :

$$q_{nm} \rightarrow q_{.m} = \frac{1}{\delta^2} + \frac{\lambda+\lambda\mu-2\mu}{\lambda(1-\mu)} \frac{\lambda^{n-1}}{\delta^2}$$

et

$$\gamma_n(m) \rightarrow \gamma(m) = \frac{2}{\delta^2} \frac{1-2\lambda+\mu}{(1-\lambda)(1-\mu)} - \frac{1}{\delta^2} + \frac{\lambda^m}{\delta^2} \frac{2\mu-\lambda\mu-\lambda}{\lambda(1-\mu)}$$

On vérifie sur ces formules que les propriétés d'ergodicité de la profondeur se répercutent sur la série sédimentaire.

2-4. Le demi-variogramme en régime stationnaire

En régime stationnaire, l'expression du demi-variogramme est donc :

$$\gamma(m) = \frac{2}{\delta^2} \frac{1-2\lambda+\mu}{(1-\lambda)(1-\mu)} - \frac{1}{\delta^2} + \frac{\lambda^m}{\delta^2} \frac{2\mu-\lambda\mu-\lambda}{\lambda(1-\mu)}$$

On vérifie que si le pas m tend vers l'infini, $\gamma(m)$ tend vers $\frac{2}{\delta^2} \frac{1-2\lambda+\mu}{(1-\lambda)(1-\mu)} - \frac{1}{\delta^2}$ qui est la variance des puissances des couches :

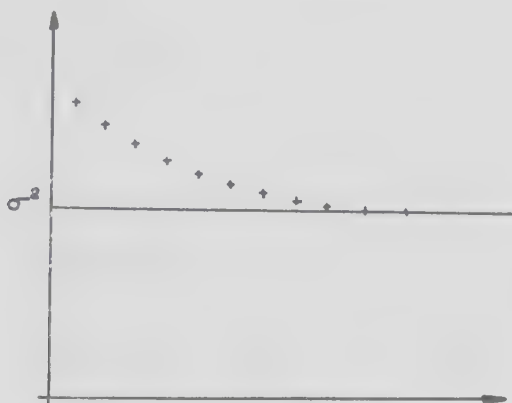
$$\sigma^2 = q - p^2.$$

L'allure du demi-variogramme dépend donc du signe de $2\mu-\lambda\mu-\lambda$.

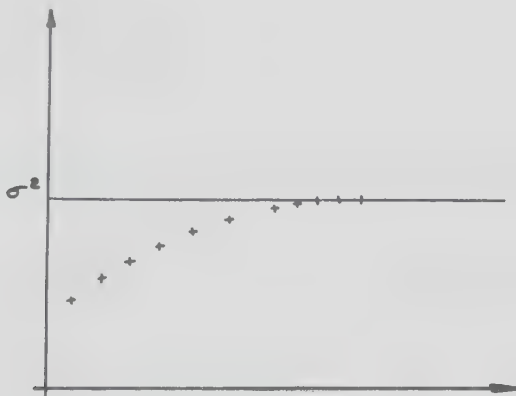
Le $2\mu-\lambda\mu-\lambda$ est nul, le coefficient de λ^m l'est également et le demi-variogramme est plat et égal, quel que soit m à la variance. Cela correspond à $q_{.m} = \frac{2}{\delta^2}$ c'est-à-dire à $E[S S_{.+m}] = E[S]^2$, donc à des couches dont les puissances sont indépendantes les unes des autres.

Cela se produit pour $\mu = \frac{\lambda}{2-\lambda}$. On vérifie aisément que cela correspond à une loi exponentielle pour les intervalles T_i (Si on s'en tient aux deux premiers moments).

Le $2\mu - \lambda\mu - \lambda$ est positif c'est-à-dire si μ est supérieur à $\frac{\lambda}{2-\lambda}$ le demi-variogramme est décroissant :



Le $2\mu - \lambda\mu - \lambda$ est négatif c'est-à-dire μ inférieur à $\frac{\lambda}{2-\lambda}$ le demi-variogramme est croissant.



Pratiquement, seuls ces deux derniers cas sont intéressants. En effet, si on trouve un variogramme plat, c'est-à-dire si les couches successives ont des puissances indépendantes les unes des autres, il est inutile de recourir à un tel modèle pour décrire la série sédimentaire. Il est beaucoup plus simple de l'envisager directement comme une succession de couches indépendantes les unes des autres dont on connaît les deux premiers moments des puissances, sans faire intervenir l'évolution de la profondeur au cours du temps.

3 - L'ESTIMATION DES PARAMETRES EN REGIME STATIONNAIRE

Nous supposons que les puissances des couches ne sont pas indépendantes les unes des autres.

3-1. Le modèle décrit dans le paragraphe 2 dépend de trois paramètres : λ , μ et δ .

Trois relations sont donc nécessaires pour l'estimer. Ces relations sont ici :

$$\begin{aligned} - \quad p &= \frac{1}{\delta} \\ - \quad q &= \frac{2}{\delta^2} \frac{1-2\lambda+\mu}{(1-\mu)(1-\lambda)} \end{aligned}$$

avec en plus :

$$\gamma(m) - \sigma^2 = \frac{2\mu-\lambda\mu-\lambda}{\delta^2\lambda(1-\mu)} \lambda^m$$

On prendra par exemple $\gamma(1)$ comme troisième relation.

$$\begin{aligned} - \quad \gamma(1) - \sigma^2 &= \frac{2\mu-\lambda\mu-\lambda}{\delta^2\lambda(1-\mu)} \quad \text{ou bien encore :} \\ - \quad \lambda &= \frac{\gamma(2) - \gamma(3)}{\gamma(1) - \gamma(2)} \end{aligned}$$

p , q et $\gamma(m)$ étant remplacés par leurs estimateurs :

$$M^* = \frac{\sum S_i}{N}, \quad D^{2*} = \frac{\sum S_i^2}{N}, \quad \Gamma_{(m)}^* = \frac{\sum (S_i - S_{i+m})^2}{2 \, CN - m}$$

On peut calculer les expressions littérales des variances d'estimations de ces estimateurs. Les calculs sont toutefois assez lourd, sauf pour σ_p^2 , variance d'estimation du moment d'ordre 1 des puissances car il faut calculer les expressions théoriques des moments d'ordre 4 et plus.

L'étude de la validité de l'estimation de l'espérance mathématique de la puissance des couches peut toutefois être faite ici complètement.

3-2. Validité de l'estimation de l'espérance mathématique de la puissance des couches.

L'espérance mathématique de la puissance des couches : m est estimée par $M^* = \frac{\sum S_i}{N}$.

On a vu que l'ordre de grandeur de la variance d'estimation est donnée

par :

$$\sigma_S^2 \sim \frac{\sigma_3^2}{N} = \frac{q-p^2}{N}$$

soit ici :

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N} \frac{1}{\delta^2} \frac{1-3\lambda+3\mu-\lambda\mu}{(1-\lambda)(1-\mu)}$$

et la variance relative est :

$$\frac{\sigma_p^2}{p} = \frac{1}{N} \frac{1-3\lambda+3\mu-\lambda\mu}{(1-\lambda)(1-\mu)}$$

La figure 3 donne $F(\lambda, \mu) = \frac{1-3\lambda+3\mu-\lambda\mu}{(1-\lambda)(1-\mu)}$ pour différentes valeurs de λ et de μ .

Si nous considérons un résultat valable pour une variance relative de l'ordre de 10 % et si, à titre indicatif, nous nous intéressons à une série sédimentaire de 100 couches :

Il vient que $\frac{1}{\delta} \frac{1-3\lambda+3\mu-\lambda\mu}{(1-\lambda)(1-\mu)}$ est au plus de l'ordre de la dizaine.

Ceci sera d'autant mieux réalisé que les couches seront peu épaisses ($\frac{1}{\delta}$ petit) et $F(\lambda, \mu)$ faible (c'est-à-dire λ - et μ - grands) donc la profondeur importante.

Ce modèle sera donc applicable avec d'autant plus de sécurité - au moins pour ce qui est de l'estimation de la puissance moyenne des couches - que le phénomène étudié correspondra à une sédimentation à forte profondeur.

Naturellement, lors d'une étude pratique, on ne connaît pas σ_S^2 mais on en a simplement une estimation $D^{2*} - M^{*2}$ et on ne peut conclure que si cette estimation ne peut pas être trop éloignée de la valeur réelle, c'est-à-dire si les fluctuations de la variance sont faibles. Il faut donc étudier les fluctuations de la variance suivant les valeurs des paramètres.

3-3. Fluctuations de la variance

La variance σ_S^2 est estimée par la quantité :

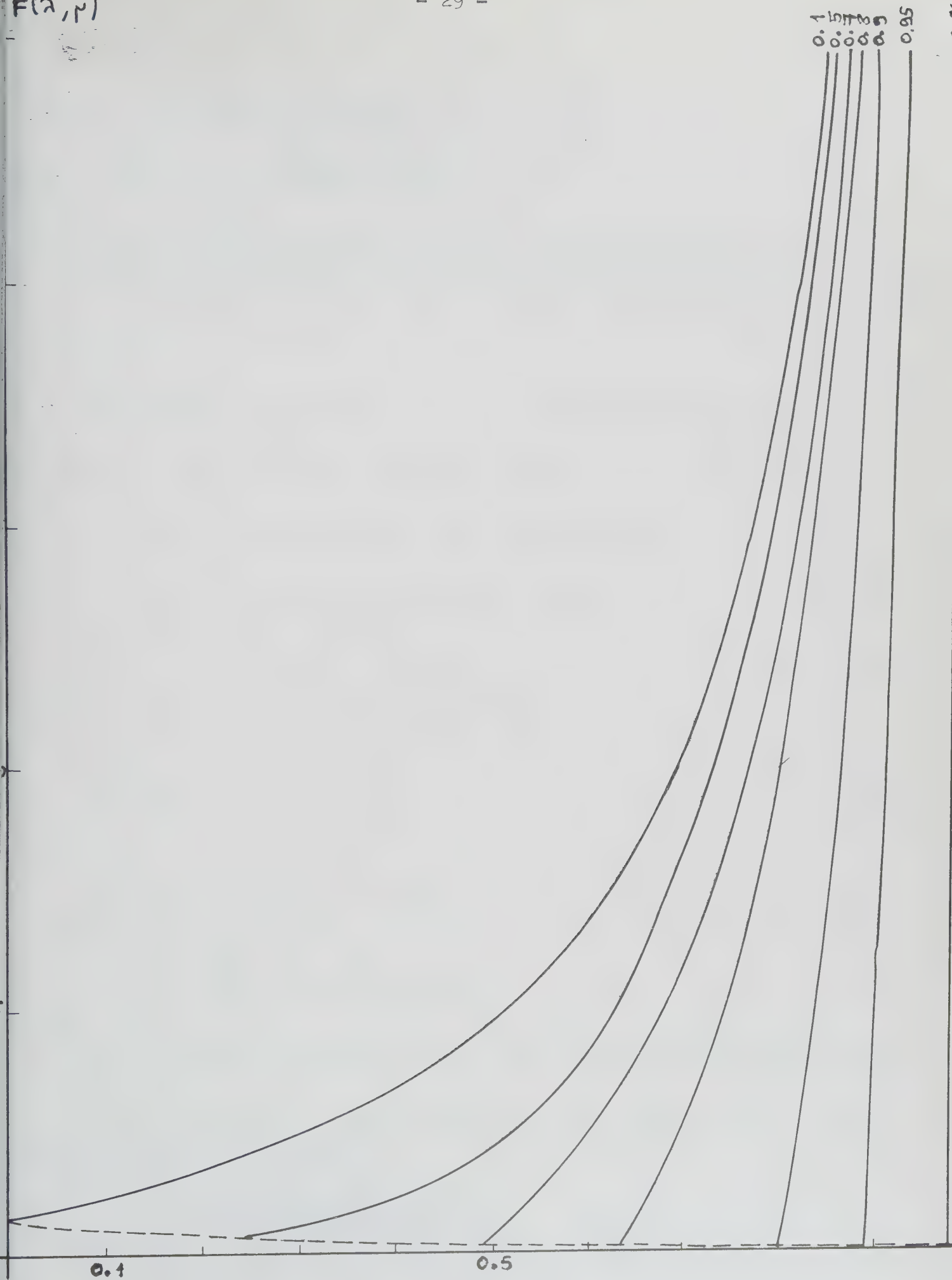


Figure 3 - $F(\lambda, \mu)$ en fonction de μ pour diverses valeurs de λ

$$\Sigma^{*2} = D^{2*} - (M^*)^2$$

$$\text{soit } \Sigma^{*2} = \frac{\sum s_i^2}{N} - \left(\frac{\sum s_i}{N}\right)^2$$

Un ordre de grandeur (majorant) de cette fluctuation nous est donné par la variance d'estimation du moment d'ordre deux des puissances des couches

$$q = E[S^2]$$

Nous avons vu ci-dessus que cette variance d'estimation est :

$$\sigma_q^2 = \frac{\sigma_{S^2}^2}{N} \text{ soit } \frac{1}{N}[E[S^4] - E[S^2]^2]$$

Nous connaissons $E[S^2]$, il faut calculer $E[S^4]$:

$$\text{Nous avons : } g_n = E[S_n^4] = E[Y_{n-1}^{+4} (1-\Pi_n)^4]$$

$$\text{Soit } f_n^+ = E[Y^{+4}], \text{ on a :}$$

$$f_n^+ = f_n^- + \frac{24}{\delta^4} + \frac{12}{\delta^2} s_n^- + \frac{4}{\delta} k_n^- + \frac{24}{\delta^3} r_n^-$$

$$\text{avec : } f_n^- = E[Y_n^{-4}]$$

$$k_n^- = E[Y_n^{-3}]$$

Il s'en suit que, en régime stationnaire, le moment d'ordre 4 de Y^- est :

$$f^- = \frac{24}{\delta^4} \frac{\rho}{(1-\rho)(1-\varphi)(1-\mu)(1-\lambda)}$$

φ et ρ étant les moments d'ordre 3 et 4 du facteur multiplicatif Π .

On en déduit que, le moment d'ordre 4 de la puissance des couches est, en régime stationnaire :

$$g = \frac{24}{\delta^4} \frac{1-4\lambda+6\mu-4\varphi+\rho}{(1-\lambda)(1-\mu)(1-\varphi)(1-\rho)}$$

Il s'en suit que l'on a la variance $\sigma_{S^2}^2$:

$$\sigma_{S^2}^2 = g - q^2$$

$$\text{soit : } \sigma_{S^2}^2 = \frac{24}{\delta^4} \frac{1-4\lambda+6\mu-4\varphi+\rho}{(1-\lambda)(1-\mu)(1-\varphi)(1-\rho)} - \frac{4}{\delta^4} \frac{(1-2\lambda+\mu)^2}{(1-\mu)^2(1-\lambda)^2}$$

Il est difficile d'aller plus loindans l'étude du cas général, c'est pourquoi, on se restreint maintenant au cas particulier où la loi des sauts du taux de sédimentation est une loi gamma de paramètre b et d'indice α .

Les quatre premiers moments du facteur multiplicatif sont alors :

$$\begin{aligned} \lambda &= \left(\frac{b}{b+1}\right)^\alpha & \mu &= \left(\frac{b}{b+2}\right)^\alpha \\ \varphi &= \left(\frac{b}{b+3}\right)^\alpha & \rho &= \left(\frac{b}{b+4}\right)^\alpha \end{aligned}$$

La figure 5 représente la courbe $\sigma_{S^2}^2/(4/\delta^4)$ pour différentes valeurs de b , en fonction de α .

Cette quantité pourra être d'autant plus faible que b sera grand c'est-à-dire λ proche de 1. - Cela correspond à une profondeur importante - Quand à la variance $\sigma_{S^2}^2$ elle sera encore plus faible si les couches - dont la puissance moyenne est $\frac{1}{\delta}$ - ne sont pas très épaisses.

La figure 6 donne la valeur du rapport $k = \frac{E(Y)}{E(S)}$ pour différentes valeurs de b et de α .

3-4. L'estimateur de l'espérance mathématique de la puissance des couches que l'on peut faire à partir d'une série sédimentaire stationnaire sera donc d'autant meilleure que les couches seront de faible épaisseur et se seront déposées à faible profondeur.

Pratiquement, sachant que l'on dispose de N couches on calculera l'estimateur de la puissance moyenne :

$$E^*(S) = \frac{\sum S_i}{N} \quad \text{de la variance : } D^{2*}(S) = \frac{\sum (S_i - E^*(S))^2}{N}$$

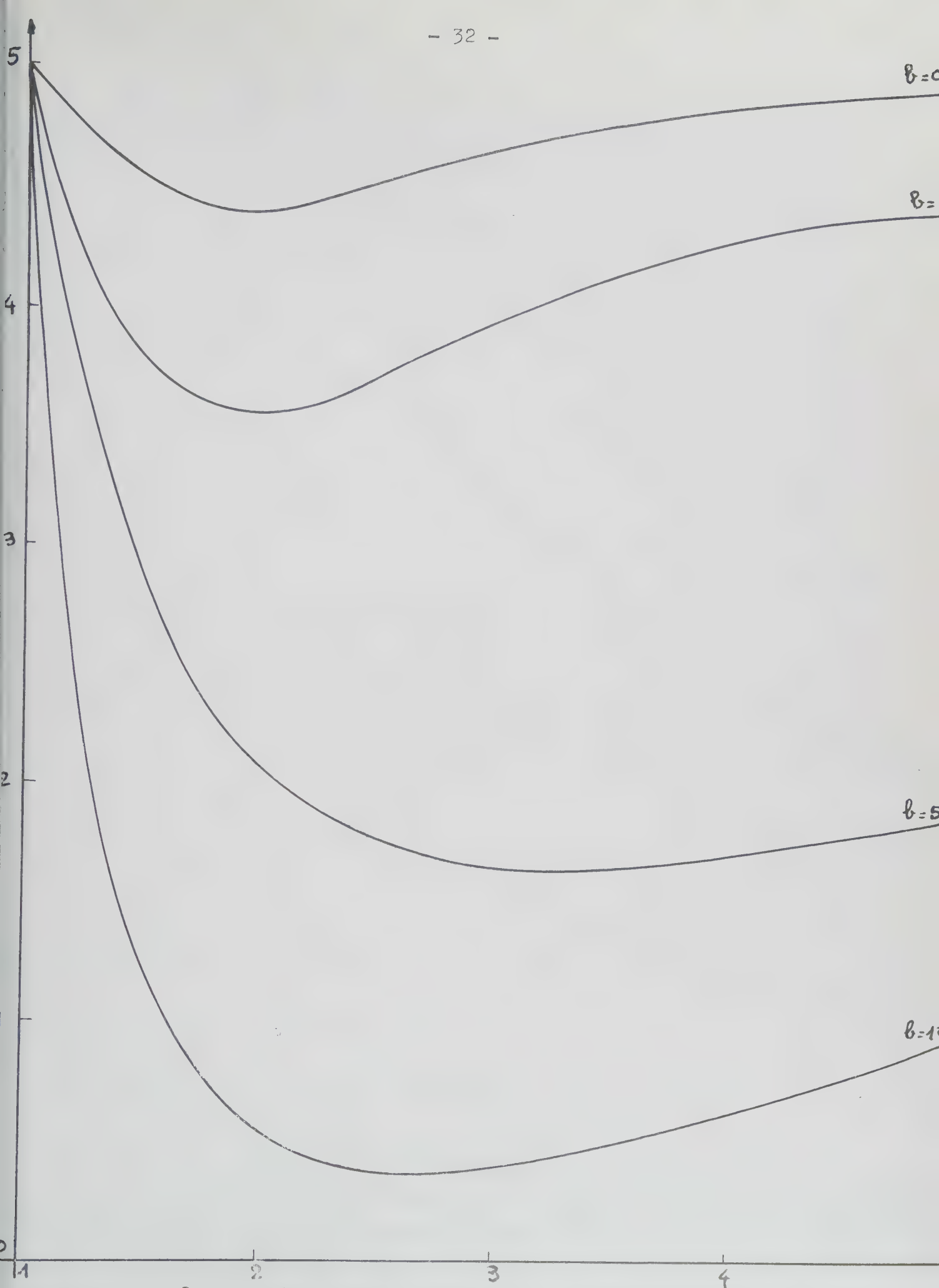


Figure 5 - $\sigma_s^2 / (4\delta^4)$ en fonction de α pour différentes valeurs de b .

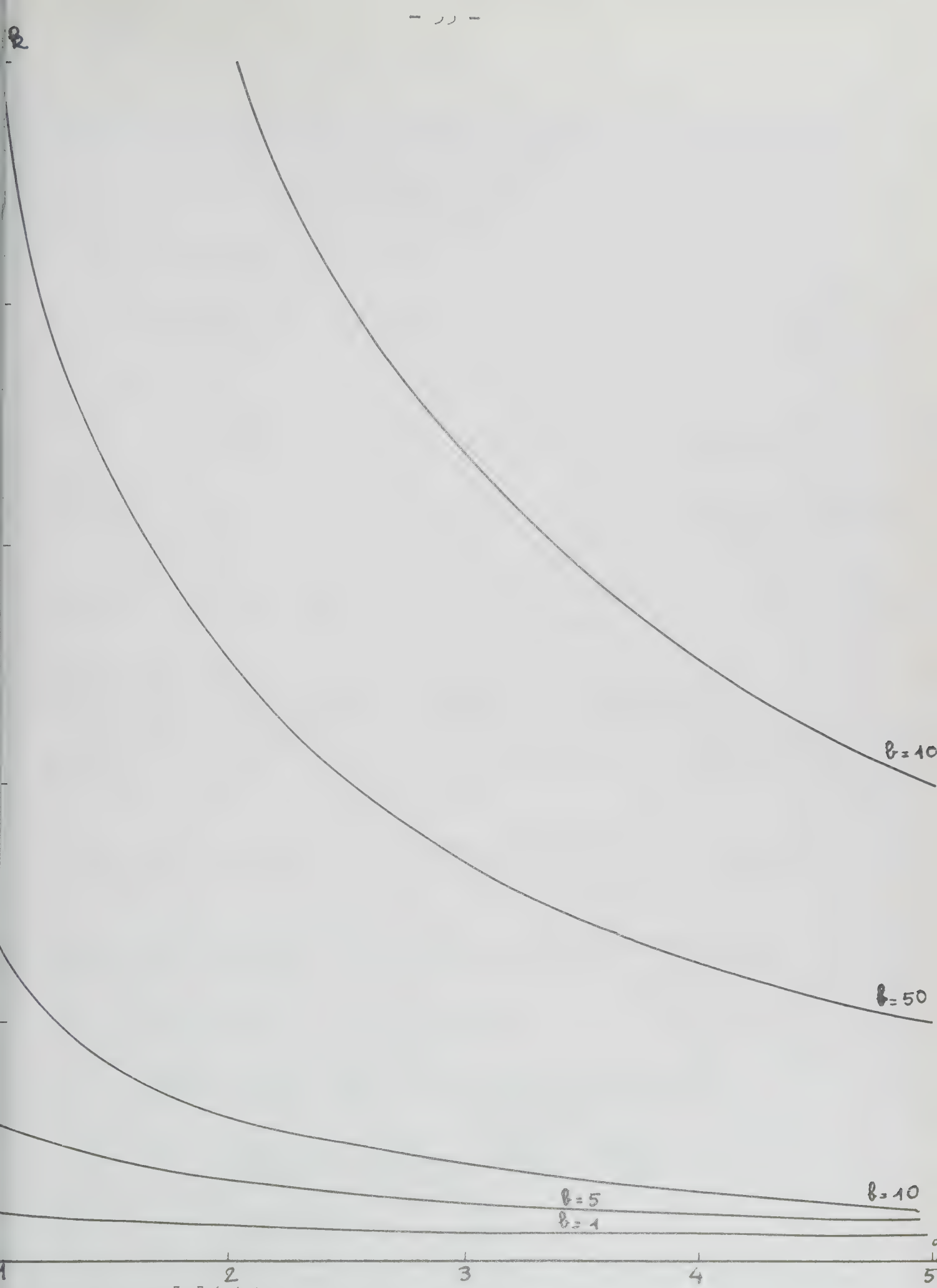


Figure 6 - $E[Y]/E(S)$ en fonction de α pour différentes valeurs de b .

ainsi que du moment d'ordre 4, ou mieux du moment centré d'ordre 4 :

$$Q^{2*}(S) = \frac{\sum (s_i^2 - E^*(s_i^2))^2}{N}$$

Si les quantités :

$$\frac{Q^{2*}(S)}{N D^{2*}(S)} \quad \text{fluctuation relative de la variance et}$$

$$\frac{D^{2*}(S)}{N E^*(S)} \quad \text{variance relative du moment d'ordre 1}$$

sont faibles - de l'ordre de 10 ou 20 % au maximum - on pourra appliquer le modèle. Sinon, on considère que l'estimation est mauvaise.

Pour les autres moments on procède à des calculs analogues : il faut étudier les moments d'ordre deux fois plus grand.

4 - L'ESTIMATION DES PARAMETRES EN PRESENCE D'UNE LEGERE DERIVE

En un premier temps, on procédera comme ci-dessus, mais, une fois les paramètres du modèle estimés, on peut calculer exactement les erreurs du deuxième type.

Il suffit d'appliquer les formules calculées dans le paragraphe 7 de la première partie aux moments théoriques calculés ci-dessus.

Les erreurs sont, successivement, pour les moments d'ordre 1 et 2 des puissances et un point du demi-variogramme :

$$\begin{aligned} D_2^*(N) &= \frac{1}{N} \left(y - \frac{1}{\delta(1-\lambda)} \right) (1-\lambda^N) \\ D_2^q(N) &= \frac{1-2\lambda+\mu}{N} \left[\frac{\mu}{1-\mu} \left(y^2 - \frac{2}{\delta^2(1-\lambda)(1-\mu)} \right) (1-\mu^{N-1}) \right. \\ &\quad + \frac{2\lambda\mu}{\delta(\lambda-\mu)} \left(y - \frac{1}{\delta(1-\lambda)} \right) \left(\frac{1-\lambda^{N-1}}{1-\lambda} - \frac{1-\mu^{N-1}}{1-\mu} \right) \\ &\quad \left. + \frac{2\lambda}{\delta} \frac{1-\lambda^{N-1}}{1-\lambda} \left(y - \frac{1}{\delta(1-\lambda)} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et : } \Delta \gamma^{(m)}_2(N) &= \frac{1}{2} [\Delta^q_2(N) + \Delta^q_2(N+m)] - \frac{1-\lambda^m}{\delta} \Delta^p_2(N) \\ &\quad - \frac{(1-\lambda)(\lambda-\mu)\lambda^{m-1}}{1-2\lambda+\mu} \Delta^q_2(N+1) \end{aligned}$$

Pour N assez grand, même de l'ordre de quelques dizaines, les termes en λ^N et μ^N sont très vite proches de zéro - les erreurs sont donc en $\frac{K}{N}$, comme les différentes variances d'estimation en régime stationnaire - K dépendant des paramètres du modèle et de la profondeur initiale. Si la dérive est faible, ce qui est le cas dans lequel nous nous plaçons, les termes en $y - \frac{1}{\delta(1-\lambda)}$ seront eux mêmes faibles - et les erreurs Δ^q_2 et $\Delta \gamma^{(m)}_2$ proviendront principalement des termes en " $y^2 - \frac{2}{\delta^2(1-\lambda)(1-\mu)}$ ".

Une dérive faible, à moins de se placer loin du point de départ du processus correspondant à une profondeur initiale y proche de $\frac{1}{\delta(1-\lambda)}$, la valeur de l'expression $y^2 - \frac{2}{\delta^2(1-\lambda)(1-\mu)}$ sera proche de $\frac{1-2\lambda+\mu}{\delta^2(1-\lambda)(1-\mu)}$ qui est la variance de la puissance des couches.

Ainsi, en présence d'une faible dérive, l'ordre de grandeur des erreurs commises lorsque l'on estime les moments de la série sédimentaire de ces moments. On a toutefois la possibilité de corriger les différentes estimations en tenant compte de cette dérive.

5 - ILLUSTRATION DE CES RESULTATS

Une première remarque s'impose, on a dit que les erreurs d'estimation sont d'autant plus faibles que le rapport de la puissance moyenne des couches à la profondeur moyenne du dépôt est lui même faible. D'autre part, ces modèles ne sont justifiés que si la profondeur a une influence réelle sur la puissance du dépôt, c'est-à-dire si un dépôt, par exemple épais, change suffisamment la valeur de la profondeur pour que le dépôt suivant soit significativement plus faible que celui qui le précède. Intuitivement on voit que ces conditions correspondent à un dépôt de couches dont la puissance moyenne n'est pas trop faible par rapport à la profondeur. On peut d'ailleurs le montrer dans le cas particulier qui nous intéresse :

En fonction des paramètres δ , λ et μ du modèle que nous avons défini ci-dessus, la profondeur moyenne est :

$$E(Y) = \frac{1}{\delta} \frac{1}{1-\lambda}$$

la puissance moyenne des couches est $E(S) = \frac{1}{\delta}$ et le demi-variogramme est de la forme :

$$\gamma(m) = \sigma^2 + \frac{2\mu - \lambda\mu - \lambda}{\lambda(1-\mu)\delta^2} \lambda^m$$

Une valeur importante du rapport $\frac{E(Y)}{E(S)}$ correspond à un λ proche de 1, posons $\lambda = 1-\varepsilon$.

Or, on a forcément les inégalités

$\lambda^2 < \mu < \lambda$ donc μ est compris entre $1-2\varepsilon$ et $1-\varepsilon$, le numérateur du coefficient de λ^m dans l'expression du demi-variogramme est donc compris entre

$$\begin{aligned} (1+\varepsilon)(1-2\varepsilon) - (1-\varepsilon) \quad \text{et} \\ (1+\varepsilon)(1-\varepsilon) - (1-\varepsilon) \end{aligned}$$

soit entre -2ε et $\varepsilon(1-\varepsilon)$.

Il est donc très faible et le demi-variogramme est presque plat, signe que les couches peuvent être considérées comme ayant des puissances indépendantes les unes des autres. Dans ce cas, il est inutile d'employer de tels modèles pour décrire la série sédimentaire.

Ainsi, lorsque l'on sera amené à utiliser ces modèles on sera presque toujours dans un cas défavorable du point de vue des erreurs d'estimation.

5-1. Estimation des principaux moments dans deux cas extrêmes et en l'absence de dérive. Les erreurs de premier type

5-1-1. Nous nous plaçons dans un cas où les valeurs de la profondeur moyenne et de la puissance moyenne des couches déposées sont du même ordre :

$$E(Y^+) = 1.33 \text{ m et } E[S] = 1 \text{ m}$$

et où la loi des amplitudes des sauts du taux de sédimentation ΔX est une loi gamma de paramètre $b = 1$ et d'indice $\alpha = 2$.

On peut alors calculer le moment d'ordre 2 des puissances des couches ainsi que l'expression du demi-variogramme de ces puissances.

$$\text{On trouve : } E[S^2] = 1.84$$

$$\text{et } \gamma(m) = 0.84 - 0.76 \cdot (0.25)^m$$

qui donne en particulier

$$\gamma(1) = 0.65$$

$$\text{et } \gamma(2) = 0.79$$

En l'absence de dérive et en fonction du nombre de couches N considéré, la figure 7 donne les estimateurs de $E[S]$, $E[S^2]$ et $\gamma(1)$ obtenus en simulant une série sédimentaire et en la traitant comme une succession réelle de couches.

5-1-2. A titre de comparaison, la figure 8 représente ces mêmes estimateurs dans un cas où l'on a :

$$E[Y^+] = 10 \text{ m} \quad E[S] = 0.1 \text{ m}$$

et où la loi des amplitudes ΔX_i est toujours une loi gama mais dont le paramètre est 247.5 et l'indice 3, alors le moment théorique d'ordre 2 des puissances des couches est 0.0176 et le demi-variogramme a pour expression :

$$\gamma(m) = 0.00764 - 5 \cdot 10^{-7} \cdot (0.99)^2$$

c'est dire qu'on peut le considérer comme plat, ce qui est un résultat normal car les couches ont des puissances faibles par rapport à la profondeur à laquelle elles se déposent ce qui, comme on l'a vu ci-dessus implique que la profondeur n'a pas d'influence sur l'évolution du dépôt ce qui signifie, en raison de la structure du modèle, que les puissances successives des couches peuvent être considérées comme des variables aléatoires indépendantes.

On peut toutefois, comme dans le cas ci-dessus, faire l'estimation des moments à partir d'une série sédimentaire fictive simulée.

La figure 5 représente de même les estimateurs de $E[S]$, $E[S^2]$ et $\gamma(1)$ pour différentes valeurs possibles N du nombre de couches considérées.

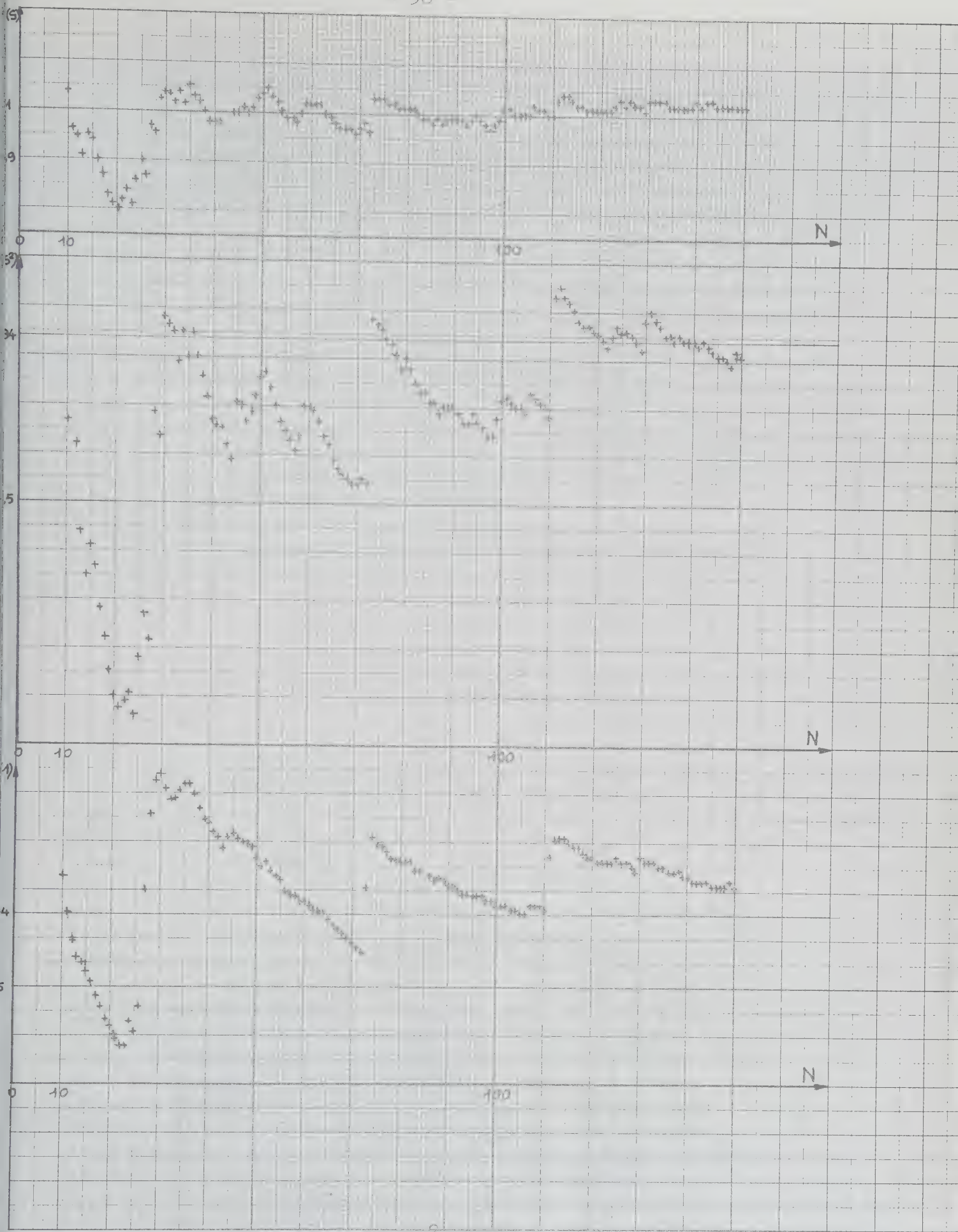


Figure 7 - Estimateurs de $E(\Gamma)$, $E(S^2)$ et $\gamma(1)$ en fonction de N
($b = 1$ et $\alpha = 2$)

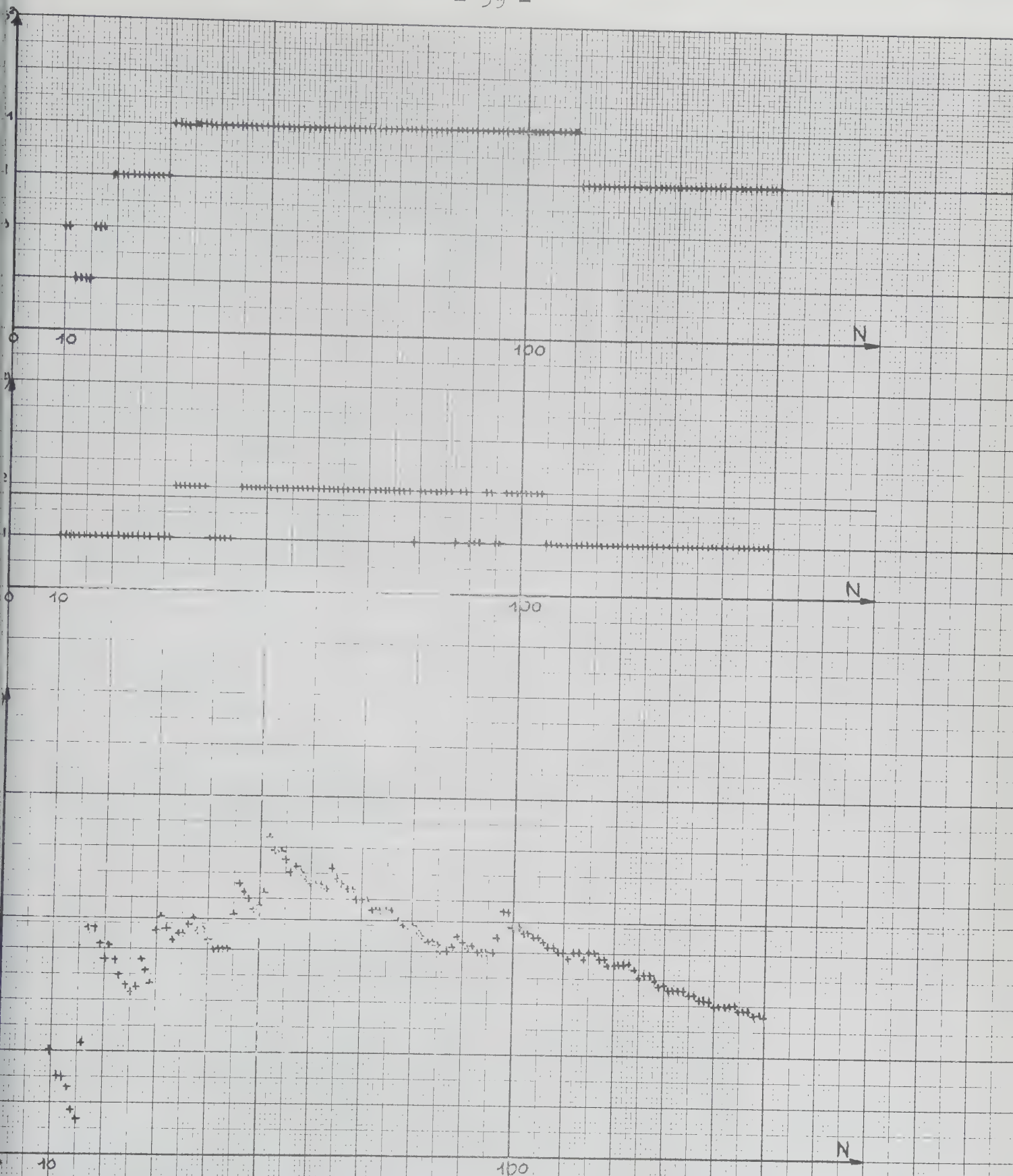


Figure 8 - Estimateurs de $E(S)$, $E(S^2)$ et $\gamma(1)$ en fonction de N
 ($b = 247,5$ et $\alpha = 3$)

6-1-3. On vérifie sur ces exemples les conclusions des chapitres précédents : dans le premier cas, qui est celui où on peut effectivement considérer que la profondeur influe sur le dépôt, l'estimation est beaucoup plus difficile que dans le second ; les estimateurs E_N^* convergent plus lentement vers E^* : il faut donc plus de couches et de plus, on le vérifie qu moins pour l'estimation de l'espérance mathématique des puissances des couches, les fluctuations du moment d'ordre double sont beaucoup plus importantes.

Dans le second cas - Figure 5 - on peut considérer que l'estimation est très bonne avec un nombre réduit de couches et on vérifie expérimentalement que les fluctuations des variances d'estimation seront faibles.

5-2. Etude générale d'une série sédimentaire simulée

Dans cet exemple on part d'une série de 50 couches issue de la simulation du modèle dans le cas où la profondeur moyenne avant chaque dépôt est $E[Y^-] = 0.985$ m la puissance moyenne des couches déposées est de 0.5 m et le taux de sédimentation suit une loi gamma de paramètre $b = 7$ et d'indice $\alpha = 3$. Les trois paramètres du modèle sont donc : $\delta = 2$, $\lambda = 0,67$ et $\mu = 0,47$.

Dans ces conditions, et en régime stationnaire, le moment d'ordre 2 des puissances des couches est $E^*[S^2] = 0,36$ et le demi-variogramme théorique a pour expression :

$$\gamma(m) = 0.11 - 0.032(0.67)^m$$

qui donne en particulier

$\gamma(1) = 0.089$	$\gamma(6) = 0.107$
$\gamma(2) = 0.096$	$\gamma(7) = 0.108$
$\gamma(3) = 0.100$	$\gamma(8) = 0.109$
$\gamma(4) = 0.104$	$\gamma(9) = 0.1092$
$\gamma(5) = 0.106$	$\gamma(10) = 0.1094$

On s'intéresse à la série sédimentaire suivante :

N	S(N)	N	S(N)	N	S(N)
1	0.29	18	0.47	35	1.06
2	0.13	19	0.85	36	0.29
3	0.29	20	0.67	37	0.27
4	0.22	21	0.40	38	0.26
5	0.4	22	0.42	39	0.28
6	0.96	23	0.43	40	0.85
7	0.13	24	0.25	41	1.07
8	0.39	25	1.34	42	0.39
9	0.59	26	0.26	43	0.36
10	0.70	27	0.73	44	0.47
11	0.65	28	0.55	45	0.47
12	1.24	29	0.26	46	0.38
13	0.89	30	0.25	47	0.36
14	0.36	31	0.32	48	0.57
15	0.76	32	1.02	49	0.46
16	0.89	33	0.96	50	0.56
17	0.35	34	0.22		

5-2-1. Stationnarité de la série sédimentaire

La droite des moindres carrés est :

$$Y = 0.5117 + 0.0005 N$$

Comme on dispose de 50 couches, il semble bien que nous devions négliger la dérive. Notons que la variance d'estimation de cette pente dans l'hypothèse où elle est nulle est :

$$\sigma_a^2 = \frac{24(2N+1)}{N(N+1)(N-1)^2} \sigma_S^2$$

σ_S étant la variance des couches que l'on peut calculer expérimentalement. On trouve : $\sigma_S^2 = 0.089$

σ_a^2 est donc de l'ordre de 4.10^{-5} et l'écart type σ_a est de l'ordre de 6.10^{-3} .

Il se peut, toutefois que nous ayons à faire des corrections dues à cette faible dérive sur les différents moments.

5-2-2. Indépendance des couches entre elles

Le test du nombre de points critiques - voir paragraphe 4 de la première partie - donne :

$$k = 30 \quad \text{avec } F(k) = 32 \\ \sigma^2(k) = 8,5$$

La quantité $\frac{k-E(k)}{\sigma^2(k)}$ est égale à 0.7

Or, avec un risque de 5 %, le seuil t_α de la loi normale est 1.96.

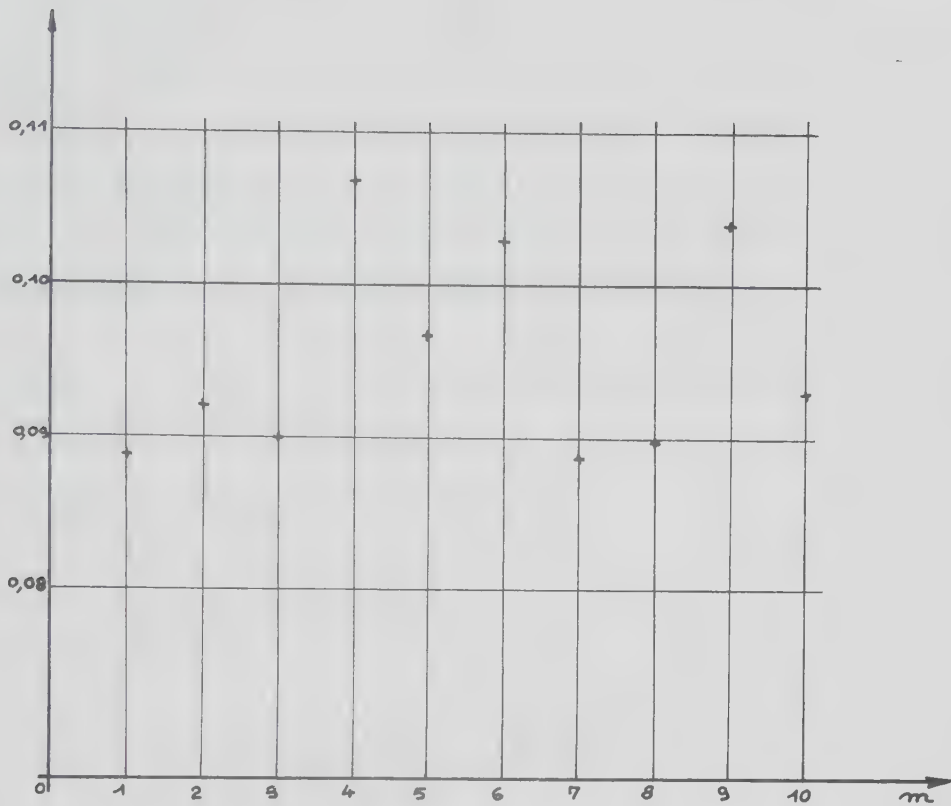
D'après ce test, on peut donc considérer que les couches ont des puissances indépendantes les unes des autres.

5-2-3. Etude du demi-variogramme

Afin de préciser le résultat ci-dessus on calcule des points du demi-variogramme expérimental, on trouve :

$\gamma_e(1) = 0.089$	$\gamma_e(6) = 0.103$
$\gamma_e(2) = 0.092$	$\gamma_e(7) = 0.089$
$\gamma_e(3) = 0.090$	$\gamma_e(8) = 0.090$
$\gamma_e(4) = 0.107$	$\gamma_e(9) = 0.109$
$\gamma_e(5) = 0.097$	$\gamma_e(10) = 0.093$

et son allure est la suivante :



Cette allure ne nous permettant pas de nous faire une idée exacte, nous appliquons aux points de ce variogramme la correction due à l'influence de la dérive :

on sait que :

$$E(\gamma(m)) = \gamma_e(m) + \frac{a^2}{6} m(N+m)$$

Ici, $a^2 = 25 \cdot 10^{-8}$ et $N = 50$

Les termes correcteurs sont donc successivement :

204	10^{-8}	1340	10^{-8}
416	10^{-8}	1600	10^{-8}
635	10^{-8}	1850	10^{-8}
865	10^{-8}	2120	10^{-8}
1100	10^{-8}	2400	10^{-8}

Ces corrections sont trop insignifiantes pour changer quoi que ce soit à l'allure du demi-variogramme expérimental, allure de laquelle on ne peut pas conclure en la dépendance des couches.

5-2-4 - Même dans un tel cas, on peut calculer les moments d'ordre 1 et 2 des puissances des couches.

On trouve expérimentalement :

$$E^*[S] = 0.523$$

$$E^*[S^2] = 0.362$$

Les ordres de grandeurs des variances d'estimation des erreurs du premier type étant respectivement :

$$\sigma_p^2 \sim 0.002$$

$$\text{et } \sigma_q^2 \sim 0.004$$

Les erreurs du deuxième type dûes à la dérive, peuvent être calculées et sont respectivement :

$$\Delta_p^2 \sim 0.013$$

$$\Delta_q^2 \sim 0.012$$

Les variances d'estimation des erreurs du premier type étant faibles, on pourra faire l'estimation en prenant pour estimateur des moments :

$$E_c^*(S) = 0.51$$

$$\text{et } E_c^*(S^2) = 0.35$$

Dans ce cas l'estimation des paramètres est donc parfaitement possible et avec une bonne précision.

Trois possibilités s'offrent alors à nous.

5-2-4-1. On fait l'hypothèse que les puissances successives des couches sont indépendantes les unes des autres. Dans ce cas, on cherche une loi dont l'espérance mathématique est 0.51 et le moment d'ordre deux 0.35 et dans cette loi on tire, indépendamment les unes des autres, des valeurs qui représentent les puissances successives des couches.

5-2-4-2. On fait l'hypothèse que le variogramme est plat mais que la profondeur a tout de même une influence. On est dans un cas particulier des modèles aléatoires génétiques.

On sait que, alors, on doit avoir :

$$E_c^*(S^2) = 2[E_2^*(S)]^2$$

Or, on a ici $E_c^*(S^2) = 0.35$

et $2E_c^*(S) = 0.52$

Cette hypothèse est donc à rejeter.

5-2-4-3. Comme les estimations des moments d'ordre un et deux de la puissance des couches sont bonnes - on en tient compte - on peut donc estimer, avec les notations habituelles le paramètre δ de la loi des sauts exponentiels de la subsidence :

On a $\delta^* = \frac{1}{E_c^*(S)}$ soit $\delta^* = 1.96$

Il reste à estimer λ et μ .

On dispose d'une relation

$$E_c^*(S^2) = \frac{2}{\delta^{*2}} \frac{1 - 2\lambda^* + \mu^*}{(1 - \lambda^*)(1 - \mu^*)}$$

Il en faut une seconde qui ne peut provenir que du variogramme. On a vu que les corrections dûes à la dérive sont négligeables. Le point le moins biaisé étant probablement le premier $\gamma^*(1)$ on peut prendre comme seconde relation :

$$\gamma^*(1) = \sigma^{*2}(S) + \frac{1}{\delta^{*2}} \frac{2\mu^* - \lambda^*}{1 - \mu^*}$$

avec $\gamma^*(1) = 0.089$.

Mais alors, il faut connaître $\sigma^{*2}(S)$ qui risque d'être suffisamment biaisée pour ne pas permettre l'estimation. C'est d'ailleurs ce qui se passe ici où l'on a :

$$\sigma^{*2}(S) = 0.09$$

ce qui donne $\lambda^* = 0.99$ et $\mu^* = 0.98$.

ces valeurs correspondant à une loi exponentielle pour les sauts du taux de sédimentation ($\mu^* = \frac{\lambda^*}{2 - \lambda^*}$) donc à un variogramme plat.

Cette estimation est toutefois mauvaise car, dans le cadre du modèle choisi, ce variogramme n'est pas compatible avec la loi des puissances des couches.

Pour supprimer l'effet de l'erreur commise sur l'estimation de la variance, on peut s'intéresser à la quantité :

$$p = \gamma(1) - \gamma(2)$$

dont on a un estimateur

$$p^* = - 0.003$$

et dont on sait qu'elle est liée à λ et μ par :

$$p = \frac{1}{\delta^2} \frac{2\mu - \lambda}{1 - \mu} (1 - \lambda)$$

Dans ces conditions, on trouve :

$$\lambda^* = 0.80 \text{ et } \mu^* = 0.65$$

En comparant avec les valeurs des paramètres du modèle générateur de la série sédimentaire, on constate que l'erreur commise est assez forte (environ 20 %) mais qu'elle est moindre que celle commise en n'éliminant pas la valeur de la variance.

Notons enfin qu'on aurait pu envisager d'estimer le demi-variogramme en ajustant, par moindres carrés une courbe d'équation $\gamma^*(m) = \alpha + \beta \lambda^m$ aux différents points expérimentaux connus.

D'une façon générale cette méthode est à rejeter car elle conduit à accorder autant de poids à tous les points du demi-variogramme alors que l'on sait que, plus m est grand, plus $\gamma_c(m)$ est biaisé.

On peut toutefois l'employer en ne prenant en compte que les premiers points du demi-variogramme et à condition qu'ils aient été calculés à partir d'un grand nombre de points.

6 - CONCLUSION DE LA SECONDE PARTIE

En conclusion, il convient de noter deux points importants. Lors de l'application d'un modèle mathématique à une série sédimentaire il faut s'assurer :

D'abord que les erreurs commise sur l'estimation des moments de la série sédimentaire ne sont pas trop grandes : pour cela il faut en général calculer le moment d'ordre double de celui que l'on veut estimer et étudier ses fluctuations.

Ensuite il faut procéder à un certain nombre de vérifications - à partir de la connaissance théorique que l'on a du modèle - visant à savoir qu'il y a compatibilité dans le cadre de ce modèle, entre les différentes valeurs des estimateurs des moments.

Alors seulement on peut envisager d'estimer les paramètres du modèle. De toutes manières, la phase la plus délicate consistera toujours en l'analyse de la série sédimentaire - des points de vue de stationnarité et d'indépendance des couches - parce que, si l'on n'y prend pas garde on peut être amené à formuler des résultats absolument faux sur la structure de la série sédimentaire. On note que, d'une façon générale, l'estimation est théoriquement d'autant plus facile que la puis-

sance des couches est faible par rapport à la profondeur à laquelle elles se sont déposées mais que ce cas correspond à un demi-variogramme des puissances des couches plat ou presque plat, ce qui introduit, comme on l'a vu dans le dernier exemple d'autres difficultés. C'est lorsque l'on est dans un cas typique d'application des modèles aléatoires-généralisés, c'est-à-dire lorsque le rapport $\frac{\text{puissance des couches}}{\text{profondeur du dépôt}}$ est assez grand (proche de 1) que les erreurs d'estimation risquent d'être les plus importantes. C'est donc ici qu'il y aura lieu de les étudier avec soin, en particulier l'erreur de deuxième type due à l'existence d'une légère dérive.

TROISIEME PARTIE

=====

ETUDE DE LA STRUCTURE DE CONTRES

=====

Cette structure a fait l'objet d'une étude complète - [7] - à trois dimensions. Le texte ci-dessous traite essentiellement de l'analyse de la structure en vue de sa représentation par un modèle aléatoire génétique et de l'estimation des paramètres de ce modèle.

1 - PRESENTATION DE LA STRUCTURE DE CONTRES.

La structure de Contres, située dans le Loir et Cher, est destinée par GAZ DE FRANCE à servir de réservoir pour le stockage de gaz naturel en provenance de Lacq. Elle est étudiée depuis 1959 par l'INSTITUT FRANCAIS DU PETROLE [9] grâce principalement à plus de vingt sondages dont quinze seulement étaient utilisables pour cette étude : les autres n'atteignaient pas les réservoirs intéressants ou même n'étaient pas encore effectués lors de son début.

Ces quinze sondages - Fig. 9 - permettent d'explorer un champ d'environ 6 km x 6 km. Les plus proches d'entre eux sont distants d'une centaine de mètres.

La structure se présente sous forme d'un dôme situé à une altitude d'environ 1000 mètres - Fig. 10 - dans le Rhétien et dans le Trias dont le sommet est à la verticale du puits CS 12. A l'échelle de toute la structure, on retrouve trois zones :

- Au sommet, les Argiles de Levallois qui présentent, après une passée argileuse semble-t-il continue, des intercalations de grès qui constituent le réservoir R1.

- Puis le réservoir R2, qui est constitué de grès avec des intercalations d'argile.

- En bas, le réservoir R3 qui lui, n'est pas atteint par les quinze sondages.

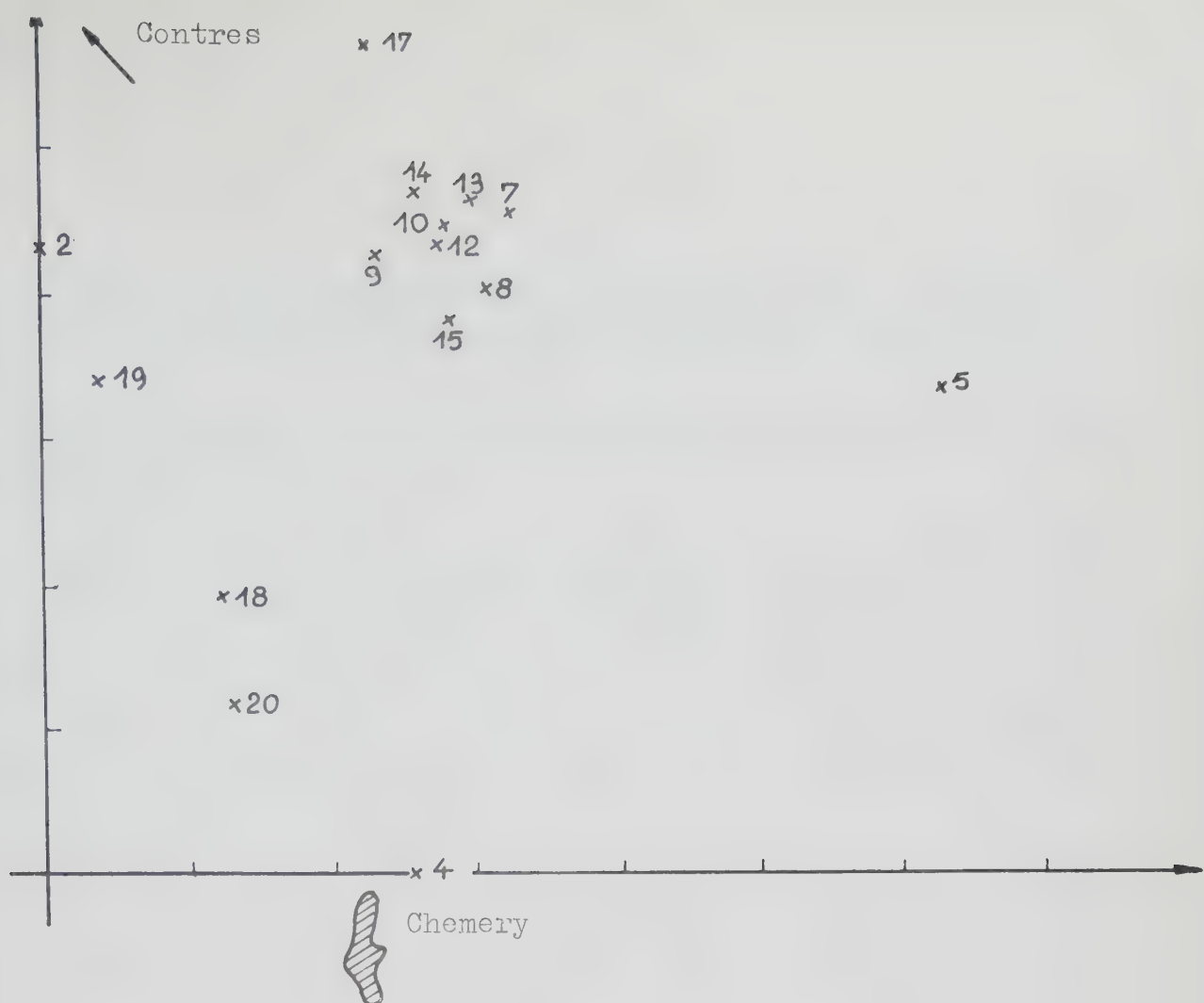


Fig. 9 : Implantation des sondages

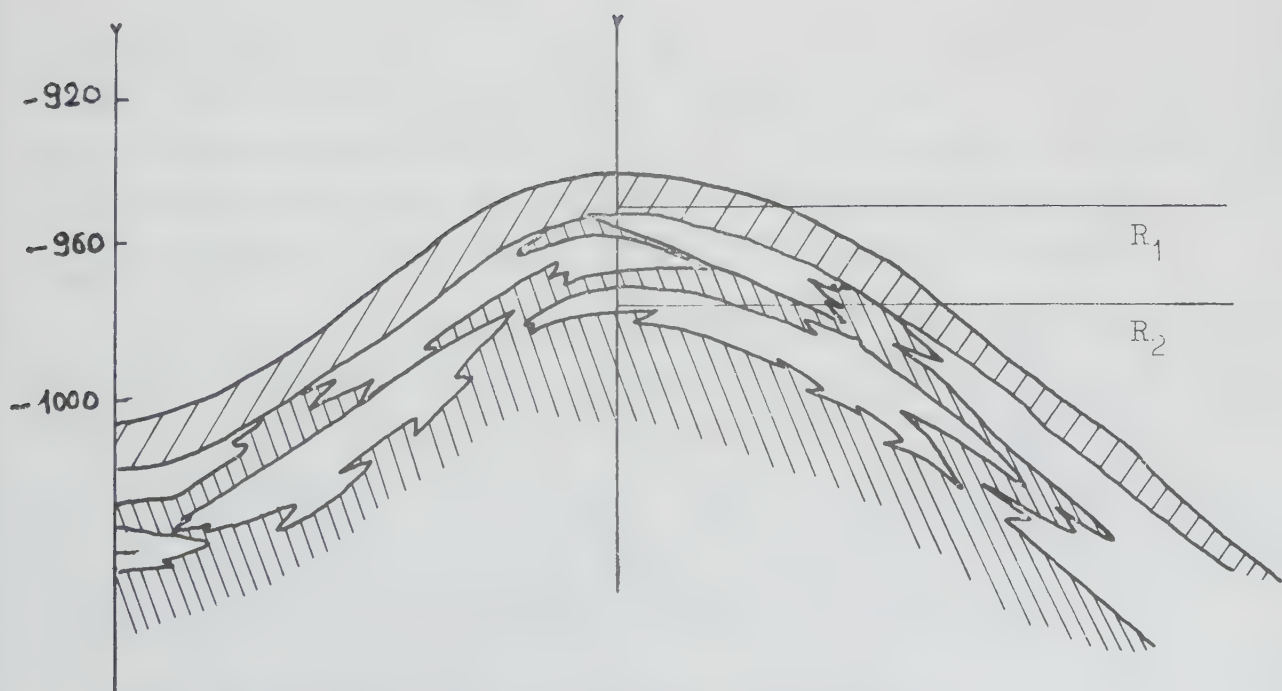


Fig. 10 : Schéma de la structure de Contres

L'étude ne porte donc que sur les réservoirs R1 et R2 à l'exclusion de la passe argileuse du sommet des Argiles de Levallois.

L'étude effectuée à la Division Géologie de l'I.F.P. a conduit aux résultats suivants :

Il s'agit d'une sédimentation à faible profondeur de type fluviale ou deltaïque conduisant à des réservoirs formés d'une masse gréseuse dans laquelle on rencontre des intercalations d'argile. Il n'a toutefois pas été possible d'effectuer des corrélations de puits à puits. Enfin, sur chacun des sondages, on peut repérer des passées d'argile et de grès, des passées consécutives et discernables l'une de l'autre pouvant être du même faciès.

L'hypothèse de base des modèles aléatoires génétiques présentés dans la seconde partie est donc ici acceptable - la puissance déposée est proportionnelle à la profondeur à l'instant du dépôt.-

2 - LES DONNEES - ETUDE STATISTIQUE.

Elles sont constituées par les Logs-lithologiques (Fig. 12) des quinze sondages retenus : ces logs ont tous la même allure : une succession de couches plus ou moins puissantes que l'on peut, avec une part d'arbitraire bien sûr, diviser en deux catégories : des couches à dominante gréseuse, ou des couches à dominante argileuse. On parlera désormais de couches de grès et de couches d'argile.

Les logs lithologiques étant tracés à partir des Logs électriques à l'échelle $1/200^\circ$, on ne repérera probablement pas un certain nombre de couches de très faible puissance qui ne seraient accessibles que par carottage. Ces logs correspondent à une puissance totale assez faible : de l'ordre de cinquante mètres pour également une cinquantaine de couches. On peut donc dire, a priori, que les résultats donnés par chacun des logs ne seront pas très significatifs.

Le tableau 1 donne, pour chacun des quinze sondages, d'abord la puissance moyenne des couches et la variance de ces puissances sans

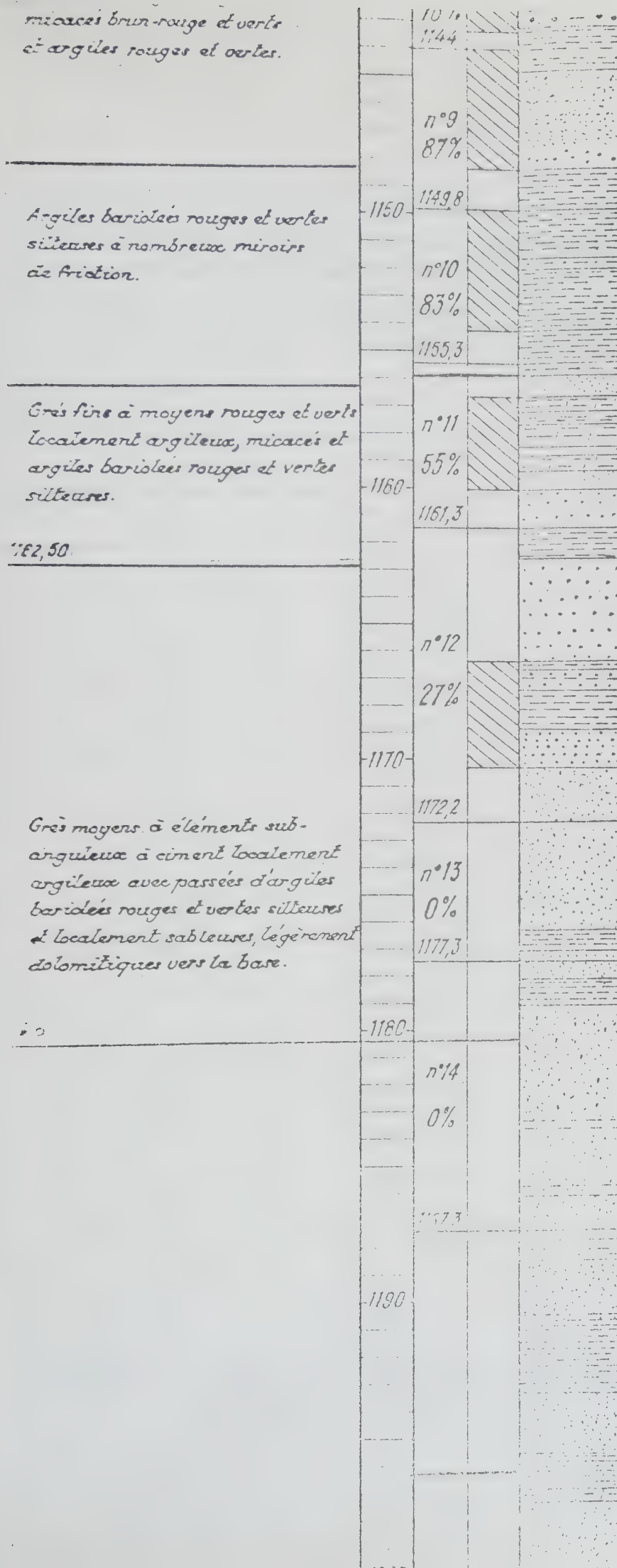


Figure 12 :

Extrait du Log-
lithologique du
Sondage CS 12

distinction de faciès, ensuite ces mêmes moments pour le grès et l'argile pris séparément. Il donne également le nombre total de couches par sondage, le nombre de couches de grès, le nombre de couches d'argile et la proportion de grès (du point de vue du nombre de couches). Les résultats sont donnés en mètres.

Sondages	Nombre de couches			N_G/N_t	Total		Grès		Argile	
	N_T	N_G	N_A		P_{mT}	σ_T^2	P_{mG}	σ_G^2	P_{mA}	σ_A^2
CS 2	47	25	22	0,53	1,3	1,9	1,4	3,1	0,9	0,4
CS 4	59	30	29	0,51	0,9	1,2	1,0	1,8	0,9	0,6
CS 5	44	25	19	0,57	1,1	2,3	0,8	0,5	1,4	4,4
CS 7	54	25	29	0,46	1,1	1,2	1,3	1,5	1,0	0,8
CS 8	51	21	30	0,41	1,2	1,7	1,2	3,0	1,2	0,8
CS 9	45	24	21	0,53	1,3	1,8	1,4	1,4	1,3	2,3
CS 10	56	27	29	0,48	0,9	1,1	1,2	1,9	0,7	0,3
CS 12	29	12	17	0,41	2,0	12,2	2,4	4,0	1,8	17,8
CS 13	45	22	23	0,49	1,4	2,9	1,8	3,1	1,2	2,6
CS 14	50	24	26	0,48	0,9	2,4	0,8	0,3	1,1	4,1
CS 15	43	22	21	0,51	1,2	19,6	0,7	2,5	1,8	20,5
CS 17	30	17	13	0,57	2,0	5,4	1,5	3,1	2,6	7,8
CS 18	31	17	14	0,55	1,9	3,3	2,1	2,6	1,7	4,1
CS 19	47	33	14	0,70	1,2	3,1	1,2	1,9	1,3	5,9
CS 20	37	21	16	0,57	1,5	2,4	1,4	1,3	2,2	3,6

Tableau 1 - Etude statistique des sondages dans la structure de Contres. Couches élémentaires.

Comme indiqué ci-dessus, le nombre de petites couches par sondage est faible : il varie de 29 à 59. Cela limite donc la signification des moments que nous venons de calculer.

Sauf pour les puits 12 et 15, les moments relatifs du grès et de l'argile sont du même ordre. Pour les sondages 12 et 15, la variance des puissances d'argile est très grande. On constate sur les logs stratigraphiques que ces différences proviennent de la présence d'une couche d'argile bien plus puissante que les autres (18 m) dans le puits 12 et de plusieurs grosses couches (de 4 à 5 m) dans le puits 15. Ce phénomène se retrouve, moins accentué, pour les sondages 17 et 18.

Enfin, on ne distingue aucune zone privilégiée du point de vue de la proportion d'argile, ou de grès, ou de la puissance des couches : les différences de proportion de couches de grès par puits sont faibles (cette proportion est proche de 0.5) et les sondages pour lesquels les puissances moyennes des couches semblent plus grandes ne sont pas regroupés (CS 12, CS 17 et CS 18).

En résumé, on peut conclure de l'étude des couches élémentaires :

1 - qu'il n'y a pas lieu de distinguer le grès et l'argile, du point de vue des caractéristiques des couches.

2 - qu'il n'y a pas de dérive apparente dans les directions horizontales.

3 - qu'il serait bon de travailler sur des quantités moyennes calculées pour l'ensemble des sondages.

Les deux premiers points peuvent être vérifiés par une étude analogue des macrocouches formées en regroupant toutes les couches successives d'un même faciès. (Tableau 2).

Là aussi, la signification des valeurs numériques trouvées pour les différents moments est faible en raison du petit nombre de macrocouches rencontrées sur chacun des puits. Sauf sur les puits 17, 18 et 19, les valeurs de ces moments pour le grès et pour l'argile sont très proches et les différences de puits à puits sont assez faibles.

Sondages	Nombre de couches			Total		Grès		Argile	
	N _T	N _G	N _A	P _{mT}	σ_T^2	P _{mG}	σ_G^2	P _{mA}	σ_A^2
CS 2	35	18	17	1,7	3,6	2,2	5,3	1,2	1,1
CS 4	36	18	18	1,5	3,6	1,6	4,7	1,4	2,4
CS 5	26	13	13	1,8	8,8	1,6	2,4	2,1	15,1
CS 7	28	14	14	2,2	8,1	2,3	10,7	2,2	5,5
CS 8	35	18	17	1,7	3,5	1,3	3,7	2,1	3,1
CS 9	21	11	10	2,9	15,5	3,0	18,5	2,8	12,1
CS 10	46	23	23	1,1	1,5	1,4	2,4	0,8	0,6
CS 12	16	8	8	3,8	19,6	3,6	7,2	3,9	31,9
CS 13	40	20	20	1,6	3,8	1,8	3,4	1,5	4,1
CS 14	43	22	21	1,1	2,7	0,8	0,4	1,4	4,9
CS 15	42	21	21	1,2	2,8	1,4	4,1	1,1	1,4
CS 17	20	10	10	3,0	8,7	2,6	6,2	3,4	10,8
CS 18	21	11	10	2,7	9,4	3,3	6,2	2,1	12,3
CS 19	24	12	12	2,5	9,9	3,4	11,3	1,5	7,0
CS 20	29	15	14	2,2	6,9	1,9	6,5	2,6	7,4

Tableau 2 - Etude statistique des sondages de la structure de Contres. Macrocouches.

Les difficultés rencontrées sur les sondages 12 et 15 lors de l'étude des couches élémentaires ne se retrouvent ici que sur le puits 12 alors que les couches très puissantes du puits 15 se comportent maintenant comme des macrocouches de puissance acceptable.

Cela nous incite à mettre en doute l'existence réelle, au moment du dépôt, de ces couches importantes qui peuvent, peut-être, être interprétées comme formées de plusieurs petites couches qui ne sont plus discernables.

Au niveau des macro-couches, il n'apparaît pas non plus de zones de plus ou moins forte densité en argile et en grès. On considère donc qu'il n'y a pas de dérive dans les directions horizontales et que les lois de dépôt, ainsi que les propriétés de ces dépôts, de l'argile et du grès sont les mêmes.

Pour pouvoir calculer des quantités moyennes exploitables, il faut encore vérifier qu'il n'y a pas de dérive dans la direction verticale.

3 - ETUDE DES DERIVES DANS LA DIRECTION VERTICALE.

Les tableaux 3 et 4 donnent les estimations linéaires par moindres carrés $R^*(n)$ des dérives, respectivement des petites couches et des grosses couches, pour les 15 sondages.

Comme on l'a vu dans la première partie, on peut chercher un ordre de grandeur de la variance d'estimation de la pente "a" des droites des moindres carrés de chacun des puits, ceci dans l'hypothèse où cette pente est nulle. Pour les droites de régression relatives aux couches élémentaires, cet ordre de grandeur moyen est :

$$\sigma_{a_n}^2 \sim 0.003$$

soit un écart type de l'ordre de $\sigma_{a_n} \sim 0.055$ qui, sauf pour le

sondage 12 est largement supérieur aux pentes trouvées. Or, pour le sondage 12, cette pente fortement négative s'explique très bien par le fait que la couche très puissante se trouve au sommet du réservoir R1.

Les dérivées trouvées ici, ne sont donc pas significatives, toutefois on sait qu'elles interviennent peut-être dans l'estimation des moments par les quantités suivantes. La pente moyenne a des droites des moindres carrés : $a = 0,01$. La moyenne des carrés des pentes de ces droites : $a_2 = 0,003$.

			Nombre de couches élémentaires : N
Puits	2	$R^*(n) = 1,1 + 0,0089 n$	47
"	4	$0,9 - 0,0003 n$	59
"	5	$1,5 - 0,0182 n$	44
"	7	$1,4 - 0,0124 n$	54
"	8	$0,9 + 0,0136 n$	51
"	9	$0,9 + 0,0188 n$	45
"	10	$0,6 + 0,0130 n$	56
"	12	$4,7 - 0,1803 n$	29
"	13	$1,6 - 0,0091 n$	45
"	14	$1,3 - 0,0230 n$	50
"	15	$2,1 - 0,0442 n$	43
"	17	$2,1 - 0,0086 n$	30
"	18	$2,1 - 0,0133 n$	31
"	19	$1,3 - 0,0055 n$	47
"	20	$1,3 + 0,0130 n$	37

Tableau 3 - Droites des moindres carrés pour les puissances des couches élémentaires.

			Nombre de Macrocouches N
Puits	2	$R^{\alpha}(n) = 1,9 - 0,0128 n$	35
"	4	$0,8 + 0,0400 n$	36
"	5	$2,3 - 0,0338 n$	26
"	7	$2,9 - 0,0433 n$	28
"	8	$0,8 + 0,0516 n$	35
"	9	$0,04 + 0,2616 n$	21
"	10	$0,5 + 0,0252 n$	46
"	12	$8 - 0,4947 n$	16
"	13	$1,8 - 0,0056 n$	40
"	14	$1,8 - 0,0322 n$	43
"	15	$1,6 - 0,0134 n$	42
"	17	$4,2 - 0,1120 n$	20
"	18	$3,9 - 0,1016 n$	21
"	19	$1 + 0,1136 n$	24
"	20	$2,5 - 0,0157 n$	29

Tableau 4 - Droites des moindres carrés pour les puissances successives des macrocouches.

Une étude analogue aboutit aux mêmes résultats en ce qui concerne les macro-couches. (Tableau 4)

La variance d'estimation de la pente des droites des moindres carrés est alors, dans le cas où cette pente est nulle de l'ordre de 10^{-3} , ce qui donne un écart-type moyen de l'ordre de $3,310^{-2}$.

Sauf pour les puits 9, 12, 17, 18 et 19, cet écart-type est de l'ordre de grandeur de la pente trouvée. Les puits 9, 12, 17, 18 et 19 sont également des puits pour lesquels les variances des puissances

des macro-couches sont fortes mais ce sont également ceux qui rencontrent le plus petit nombre de macro-couches, les puits n'étant pas regroupés et ne présentant pas des dérives dans le même sens, on ne considère pas leur comportement comme significatif, et on passe aux quantités moyennes.

La pente moyenne a' est : $- 0,01$

La moyenne des carrés des pentes est : $a_2' = 0,02$

L'hypothèse qu'il n'existe pas de dérive dans les directions horizontales rend possible le travail sur des quantités moyennes calculées à partir des quinze sondages c'est-à-dire à partir d'un nombre de couches, non plus de l'ordre de quelques dizaines mais de l'ordre de plusieurs centaines.

4 - PREMIERS ESTIMATEURS DES MOMENTS.

On dispose donc de 462 macrocouches alternativement d'argile et de grès qui se divisent en 668 couches élémentaires. On a en moyenne 31 macrocouches et 45 macrocouches par sondage. On a également des ordres de grandeur des puissances moyennes des macrocouches et des couches élémentaires : respectivement 1,9 m et 1,3 m , ainsi que des variances de ces puissances : 5,9 m et 3,2 m (en faisant directement les moyennes des quantités trouvées pour chaque sondage.)

4-1 Estimation des deux premiers moments des puissances des couches élémentaires.

Un ordre de grandeur de la variance d'estimation de la puissance des petites couches est donc :

$$\sigma_p^2 \sim \frac{3,2}{668} = 0,005$$

soit un écart-type de 0,07.

L'erreur due à l'existence d'une faible dérive se calcule et est de l'ordre de :

$$\Delta_2^{p'} = - 0,23$$

et on obtient un estimateur P'^* de la puissance moyenne des couches élémentaires.

$$P'^* = 1.45 - 0.23$$

$$\text{soit } \underline{P'^* = 1,22 \text{ m}}$$

De la même façon, on calcule l'erreur commise sur la variance en raison de la dérive, et on obtient un estimateur de la variance des puissances des petites couches

$$\underline{\sigma^{2'*} = 2.72}$$

avec une variance d'estimation assez faible (de l'ordre de 0,1).

4-2 Estimation des deux premiers moments des puissances des macrocouches.

Dans ce cas, on obtient :

Pour l'espérance mathématique

$$\underline{P^* = 1,77 \text{ m}}$$

avec une variance d'estimation très faible (de l'ordre du centième).

Pour la variance :

$$\underline{\sigma^{2*} = 7,7}$$

avec une variance d'estimation assez forte (de l'ordre de 3).

De plus, en ce qui concerne la validité de ces estimations, on remarque que, alors que les pentes moyennes des droites de régressions sont faibles dans les deux cas, et que la moyenne des carrés de ces pentes l'est également pour les couches élémentaires, la quantité a_2' relative aux moyennes des carrés des pentes des droites de régressions des puissances des macrocouches est assez forte.

Il convient donc d'émettre des doutes sur la validité de la dernière variance calculée. On disposera d'ailleurs d'un moyen de vérification avec l'estimation de la variance donnée par le comportement du demi-variogramme pour des pas élevés.

5 - INDEPENDANCE OU DEPENDANCE DES COUCHES ELEMENTAIRES.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs du demi-variogramme $\gamma(m)$ des puissances des couches élémentaires. Il s'agit du demi-variogramme moyen calculé à partir des 15 sondages :

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\gamma(m)$	3,06	2,87	2,76	2,84	2,80	3,03	3,17	3,13	2,23	3,40

Les corrections dues à la dérive sont respectivement :

0.03 0.06 0.09 0.12 0.15 0.18 0.21 0.24 0.27 0.30

ce qui donne comme demi-variogramme corrigé :

3.03 2.81 2.67 2.72 2.65 2.85 2.96 2.89 2.96 3.10

On constate sur la figure 13 que ce variogramme, si son comportement pour les premiers points est du type exponentiel décroissant, son allure par la suite traduit l'existence d'une dérive résiduelle. Cette dérive résiduelle peut provenir d'une dérive dans le nombre moyen de petites couches par grande couche du bas vers le haut d'une verticale : en effet, si on corrige les points du demi-variogramme en calculant les termes correcteurs de la façon suivante :

$$\frac{\text{terme correcteur relatif aux grosses couches}}{(\text{nombre de petites couches par grosse couche})^2}$$

on obtient une allure exponentielle, qui donne une estimation de la

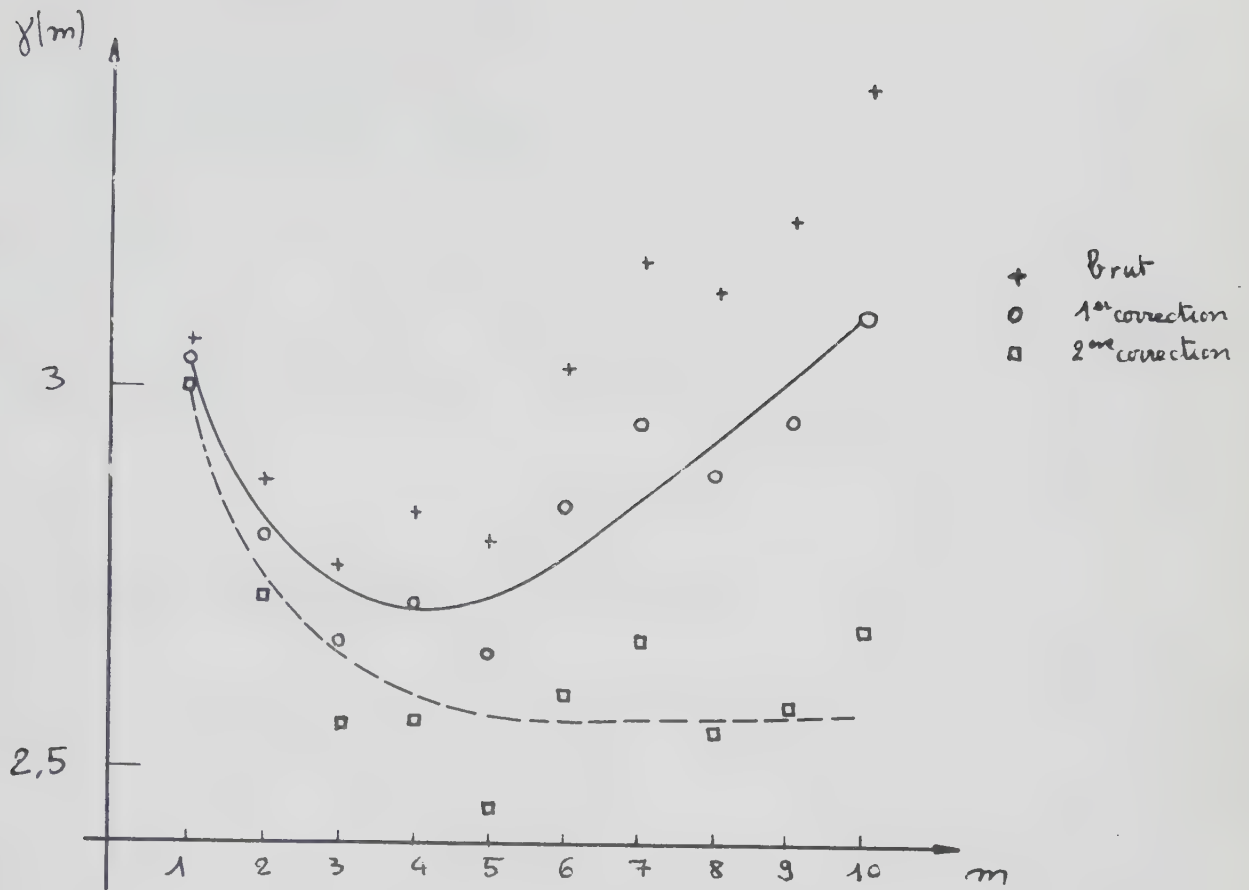


Figure 13 - Demi-variogramme moyen des couches élémentaires

variance de l'ordre de 2,55 qui est du même ordre que ce que l'on avait trouvé directement ci-dessus.

Le caractère plat du demi-variogramme se teste selon la méthode exposée dans le quatrième paragraphe de la première partie.

Le seuil, à 5% pour $\gamma(1)$ est alors égal à 2,8 qui est inférieur à la valeur calculée. On considérera donc que les puissances successives des couches ne sont pas indépendantes et que leur demi-variogramme a une allure exponentielle décroissante.

6 - INDEPENDANCE OU DEPENDANCE DES MACROCOUCHES.

On procède de la même façon pour les macrocouches dont le demi-variogramme moyen est :

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\gamma(m)$	5,95	5,29	5,20	5,16	5,56	5,62	5,96	5,97	6,03	6,20

qui, en tenant compte du terme correcteur, donne :

5,79 4,98 4,73 4,54 4,78 4,68 4,77 4,72 4,73 4,64

Comme le montre la Figure 14, ce demi-variogramme est d'allure exponentielle décroissante. On vérifie par le même test que précédemment que les puissances des couches ne sont pas indépendantes (le seuil à 5% pour $\gamma(1)$ est égal à 5,13).

Ce demi-variogramme nous donne 4,7 comme estimation de la variance.

7 - CARACTERISTIQUES DES COUCHES ELEMENTAIRES D'UNE MACROCOUCHE.

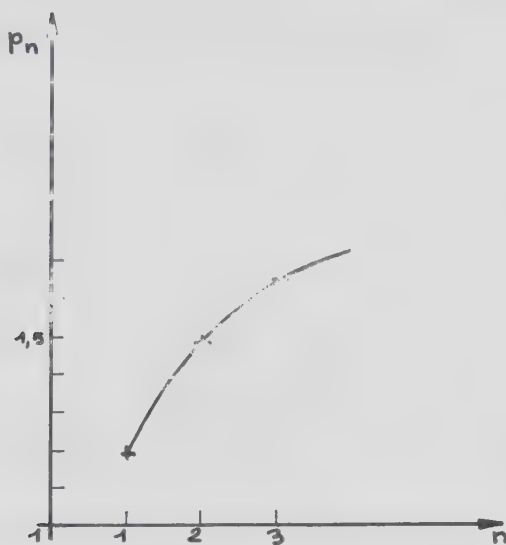
7-1 Loi de la puissance moyenne des couches élémentaires successives d'une macrocouche.

On trouve pour la première : $p_1 = 1,19$ m

pour la seconde : $p_2 = 1,50$ m

pour la troisième : $p_3 = 1,65$ m

Cette loi a donc un comportement exponentiel croissant :



7-2 Loi du nombre de couches élémentaires par macrocouche.

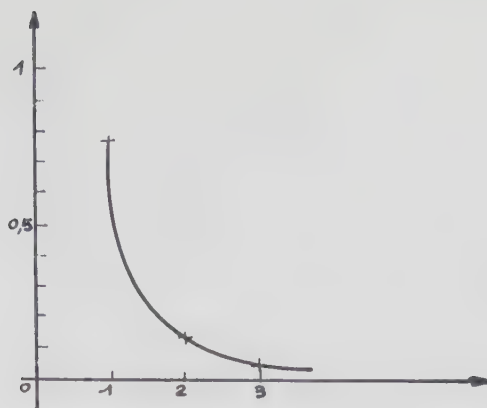
On trouve que, sur un total de 462 macrocouches, 356 sont constituées d'une seule couche élémentaire, 59 de deux et 23 de trois. Le nombre moyen de couches élémentaires par macrocouche étant 1,48. ce qui donne donc :

pour la première : $p_1 = 0,77$

pour la seconde : $p_2 = 0,13$

pour la troisième : $p_3 = 0,05$

qui est du type exponentiel décroissant :



8 - CONCLUSION DE L'ETUDE DES DONNEES ET DE L'ESTIMATION DES PRINCIPALES CARACTERISTIQUES DE LA SERIE SEDIMENTAIRE.

Si l'on s'en tient à l'étude de la série sédimentaire sur une verticale, on aboutit successivement aux conclusions suivantes :

- La série sédimentaire est stationnaire.
- Les puissances des couches élémentaires et des macrocouches successives ne sont pas indépendantes les unes des autres et leurs demi-variogrammes sont, tous deux, du type exponentiel décroissant.
- La loi du nombre de couches élémentaires par macrocouche est du type exponentiel décroissant et sa moyenne est 1,48.
- La loi de la puissance moyenne des couches élémentaires d'une macrocouche est également exponentielle.

Et ceci sans distinguer les passées d'argile de celles de grès.

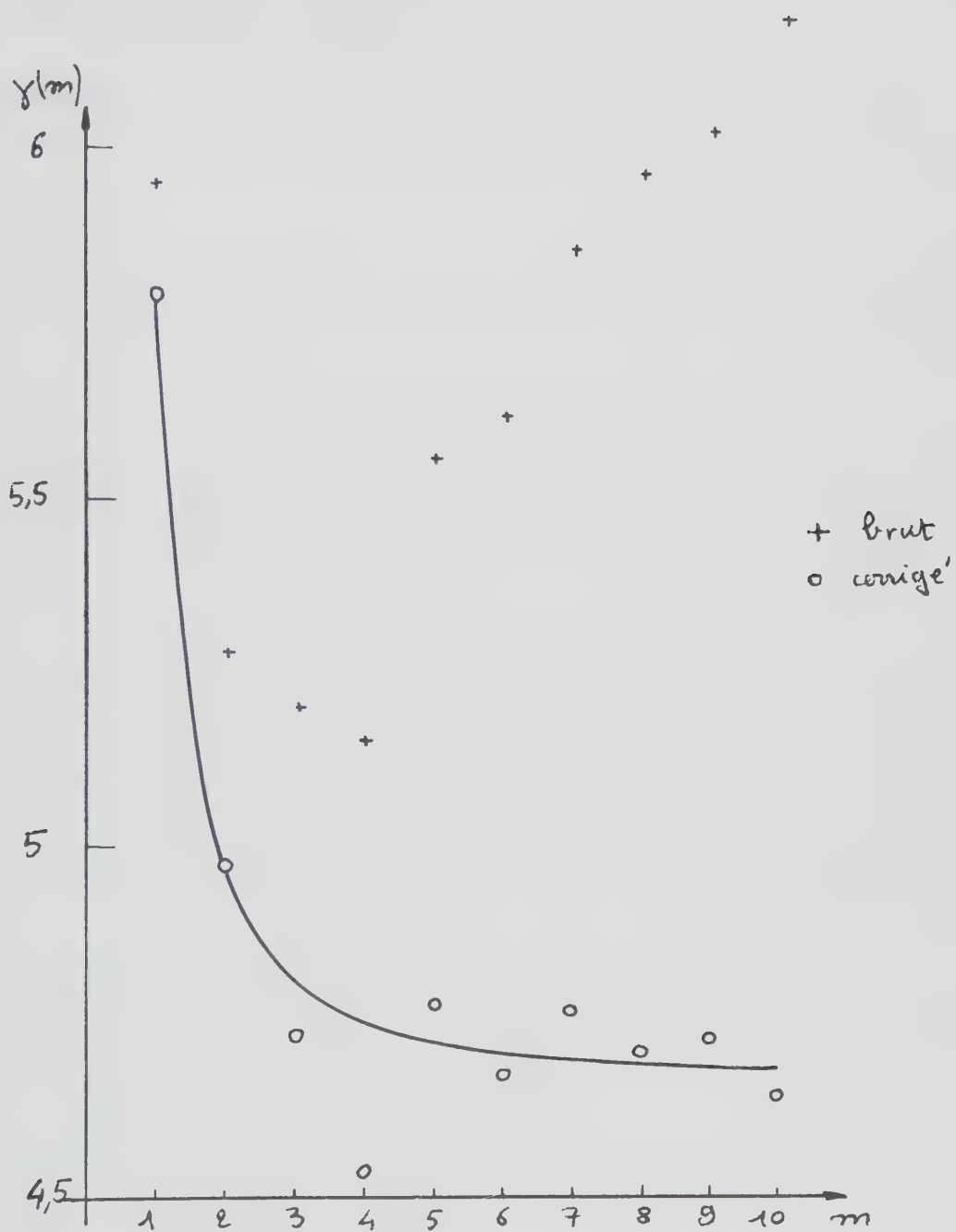


Figure 14 - Demi-variogramme moyen des macro-couches

9 - DESCRIPTION D'UN MODELE PARTICULIER - GENERALITES

Le modèle présenté ici a pour objet de décrire une série sédimentaire constituée de la succession de passées de grès ou d'argile, des passées consécutives pouvant être de même faciès, et formant ainsi une macro-couche du faciès considéré.

Etendu à trois dimensions, voir [8], ce modèle correspond à des dépôts de couches alternativement d'argilē et de grès, ces couches présentant des lacunes.

Le modèle traduit une sédimentation à faible profondeur de type fluviatile ou deltaïque.

9-1. Facteurs principaux et équation d'évolution

H_t étant la subsidence et X_t le taux de sédimentation le long de la verticale considérée, l'équation d'évolution qui lie la profondeur Y_t à X_t et à H_t est :

$$dY_t = dH_t - Y_t dX_t$$

Quant à la nature du faciès, elle est liée à $X_t(x)$ de façon suivante.

Il y a alternativement dépôt d'une couche de grès et d'une couche d'argile, ces couches présentant des lacunes c'est-à-dire n'apparaissant sur la verticale considérée qu'avec une certaine probabilité.

On considère que la subsidence est continue :

$H_t = t$ et que le dépôt a lieu de façon instantannée à des instants aléatoires (X_t est une fonction de sauts).

Le long d'une verticale, la profondeur évolue donc de la façon suivante :

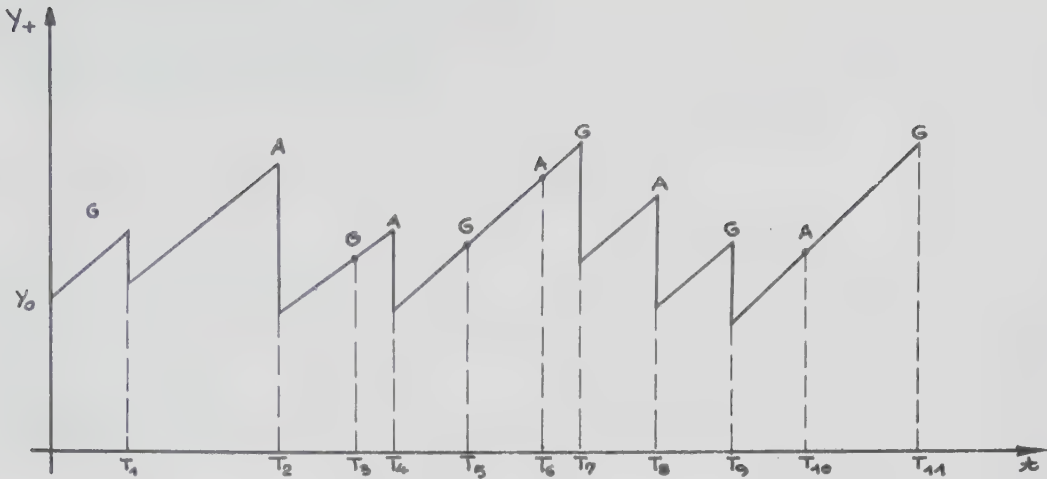


Figure 11

Dans ce cas, la seconde et la troisième couche d'argile, ainsi que la troisième et la cinquième couche de grès n'apparaissent pas sur la verticale étudiée. La séquence obtenue sera donc : G A A G A G G

On suppose dans ce qui suit que les intervalles $T_n - T_{n-1}$ ont des longueurs exponentielles de paramètre γ_A ou γ_B suivant qu'ils précèdent un dépôt d'argile ou de grès.

On appelle facteur multiplicatif du $n^{\text{ième}}$ dépôt la quantité $\Pi_n = e^{-\Delta X_n}$, ΔX_n étant le saut du processus X_t à l'instant T_n .

9-2. Evolution de la profondeur

Entre les instants T_n et T_{n+1} , la profondeur évolue lentement avec

$$Y_t = Y_n^+ + t, \quad t < T_{n+1} - T_n$$

si on note Y_n^+ la profondeur après le $n^{\text{ième}}$ dépôt (effectif ou non).

Si Y_n^- était la profondeur avant ce dépôt, on a :

$$Y_n^+ = Y_n^- e^{-\Delta X_n} = Y_n^- \Pi_n$$

la puissance de la couche déposée étant :

$$U_n = Y_n^- (1 - \Pi_n)$$

10 - PROPRIETES DES MACRO-COUCHE

10-1. Etude de la $n^{\text{ième}}$ macro-couche

Soit α_A (respectivement α_G) la probabilité pour qu'une couche d'argile (de grès) n'atteigne pas la verticale étudiée.

On pose $\beta_A = 1 - \alpha_A$ et $\beta_G = 1 - \alpha_G$

Si λ'_A et μ'_A (respectivement λ'_G et μ'_G) sont les deux premiers moments du facteur multiplicatif relatif à l'argile (ou grès) et si λ_A et μ_A (λ_G et μ_G) sont ces moments conditionnellement au fait qu'il y a effectivement un dépôt, on a :

$$\lambda'_A = \alpha_A + \beta_A \lambda_A$$

$$\mu'_A = \alpha_A + \beta_A \mu_A$$

et des expressions analogues pour le grès.

Soient Y_n la profondeur après la $n^{\text{ième}}$ macro-couche d'argile

Z_n la profondeur après la $n^{\text{ième}}$ macro-couche de grès

Si on appelle " B_G " l'évènement :

"le premier dépôt effectif est un dépôt de grès"

on peut calculer les moments d'ordre 1 et 2 des deux quantités, conditionnellement à " B_G " et en fonction de la profondeur initiale y

Soient $r_n^{GG}(y) = E(Z_n/B_G)$, $s_n^{GG}(y) = E(Z_n^2/B_G)$

$r_n^{GA}(y) = E(Y_n/B_G)$, $s_n^{GA}(y) = E(Y_n^2/B_G)$

on trouve des expressions du type (ici, pour les macro-couches de grès)

$$r_n^{GG}(y) = r^G + b_G y B^{n-1} - b_G r^G B^{n-1}$$

$$\text{et } s_n^{GG}(y) = c^G + d^G r_{n-1}^{GA}(y) + s_{n-1}^{GA}$$

où r^G , b_G , c^G , d^G et B sont des quantités ne dépendant ni de n ni de y .

Si V_n et W_n sont les puissances des $n^{\text{ièmes}}$ couches d'argile et de grès, on peut également calculer leurs espérances mathématiques, conditionnellement à B_G .

Si on note $P_n^{GG}(y) = E(W_n / B_G)$

et $P_n^{GA}(y) = E(V_n / B_G)$

on a :

$$P_n^{GG}(y) = f_G + r_{n-1}^A g_G$$

$$\text{et } P_n^{GA}(y) = f_A + r_A^G g_A$$

si on note r_j^i l'espérance mathématique de la profondeur après le dépôt de la macro-couche précédente f_G, g_G, f_A et g_A ne dépendent ni de n , ni des conditions initiales.

10-2. Variogramme des macro-couches

On peut, en un premier temps, définir les moments croisés suivant :

$$Q_{n,m}^{GG}(y) = E(W_n W_{n+m} / B_G)$$

$$\text{et } Q_{n,m}^{GA}(y) = E(W_n V_{n+m} / B_G)$$

qui permettent de déterminer les variogrammes

$$\gamma_{n,m}^{GG}(m) = T_n^{GG}(y) - Q_{n,m}^{GG}(y)$$

$$\text{et } \gamma_{n,y}^{GA}(m) = T_n^{GA}(y) - Q_{n,m}^{GA}(y)$$

$$\text{où l'on a : } T_n^{GA}(y) = E[W_n V_n / B_G]$$

$$\text{et } T_n^{GG} = E[W_n^2 / B_G]$$

10-3. Résultats en régime stationnaire

Si on fait tendre n vers l'infini, c'est-à-dire si on s'intéresse à ce qui se passe très loin du début du processus, on constate que les différents moments des profondeurs qui nous intéressent deviennent indépendants, non seulement de n mais également de la profondeur initiale y :

Le processus Y_t a donc atteint un régime stationnaire. Il est intuitif que le processus constitué par la succession des puissances des grosses couches - qui est celui qui nous intéresse en fait - atteint lui aussi un régime stationnaire. En effet, les puissances déposées ne dépendent que de la profondeur à laquelle a lieu le dépôt, qui devient indépendante de sa valeur initiale, et du facteur multiplicatif Π_n qui ne dépend ni de n ni de y .

On donnera ci-dessous et dans un cas particulier, les expressions de ces différents moments en régime stationnaire.

Notons simplement que l'on montre que, en régime stationnaire, on a :

$$Q_{n,m}^{GG}(y) \rightarrow Q_m^{GG} = (p^G)^2 + s_G(T^G - p^G r^G) B^{m-1}$$

$$\text{et } Q_{n,m}^{GA}(y) \rightarrow Q_m^{GA} = p^G p^A + s_A(T^G - p^G r^G) B^m$$

où p^G et p^A sont les espérances mathématiques stationnaires des puissances des macro-couches et où T^G est la limite du moment croisé $T_n^{GA}(y)$ définit ci-dessus.

11 - PROPRIETE DES PASSEES ELEMENTAIRES

11-1. Loi du nombre de passées élémentaires dans une macro-couche

On calcule les deux probabilités suivantes :

$P_A(n) = P(N_A = n)$ probabilité pour qu'une macro-couche d'argile soit constituée de n passées élémentaires et $P_G(n) = P(N_G = n)$ relative à une macro-couche de grès.

Ces probabilités s'entendent pour des macro-couches effectives, n est donc au moins égal à 1.

On trouve :

$$P_A(n) = G_A (1 - G_A)^{n-1}$$

$$P_G(n) = G_G (1 - G_G)^{n-1}$$

avec
$$G_A = \frac{\beta_G}{1 - \alpha_A \alpha_G} \quad \text{et} \quad G_G = \frac{\beta_A}{1 - \alpha_A \alpha_G}$$

11-2. Espérance mathématique des puissances des passées élémentaires successives d'une macro-couche, moments d'ordre 1 et 2 et demi-vario-gramme de ces passées continues

On peut trouver - voir [8] - des expressions de ces quantités dans le cas général - on les donnera ci-dessous dans le cas particulier appliqué à la situation de l'Argile.

12 - Cas particulier : Les lois de dépôt de l'argile et du grès sont les mêmes

On suppose maintenant que le dépôt se fait de la même façon quelque soit le faciès envisagé.

A des instants T_i séparés par des intervalles de longueur exponentielle de loi de paramètre γ se déposent des couches lacunaires alternativement d'argile et de grès.

Ces couches lacunaires ont une probabilité α de ne pas apparaître sur une verticale donnée.

Le facteur multiplicatif Π a pour premiers moments λ' et μ' . Conditionnellement au fait que l'on a effectivement un dépôt, ces moments sont λ et μ liés à λ' et μ' par les relations

$$\begin{aligned}\lambda' &= \alpha + \lambda\beta & \beta &= 1 - \alpha \\ \mu' &= \alpha + \mu\beta\end{aligned}$$

Le modèle dépend donc de quatre paramètres qui peuvent être par exemple : γ , λ' , μ' et α .

12-1. Résultats relatifs aux macro-couches

Ces résultats sont, bien sûr, donnés en régime stationnaire

Profondeur moyenne après le dépôt d'une macro-couche

$$r = \frac{a}{1-b} \quad \text{avec} \quad b = \frac{\beta\lambda}{1-\alpha\lambda^2}$$

$$a = \frac{\beta}{1-\alpha\lambda^2} \left(\frac{\lambda}{\gamma} - \right)$$

$$= \frac{\beta}{\gamma} \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}$$

Puissance moyenne d'une macro-couche

$$P = f + g r \quad \text{avec}$$

$$f = \frac{1-\lambda}{\gamma} + \frac{1-\lambda^2}{\gamma^2} \left[\frac{\alpha}{\beta} + \left(\frac{\lambda}{\gamma} - \right) \frac{\alpha\lambda^2}{1-\alpha\lambda^2} \right]$$

$$\text{et } g = \frac{(1-\lambda^2)\alpha\lambda}{1-\alpha\lambda^2} + (1-\lambda)$$

Demi-variogramme

Il est de la forme :

$$\Gamma(m) = A + C b^m$$

12-2. Résultats relatifs aux passées élémentaires

Puissance moyenne

$$P' = \frac{1}{\beta\gamma}$$

Moment d'ordre deux des puissances

$$Q'_0 = \frac{2}{\beta^2 \gamma^2} \frac{1-2\lambda+\mu}{(1-\lambda)(1-\mu)}$$

Demi-variogramme

$$\gamma(m) = A' + C' \lambda^m$$

Puissance moyenne de la n^{ième} passée élémentaire d'une macro-couche
(conditionnellement au fait qu'il y a effectivement un dépôt)

$$p_n = \frac{2P'}{1+\alpha} + (r - P'(1-\alpha)) \lambda^{n-1} - \left(r + \frac{P'(1+\alpha^2)}{1+\alpha} \right) \lambda^n$$

12-3. On dispose ainsi de six relations pour quatre paramètres, on pourra donc, lors de l'application à un cas réel, vérifier la validité du modèle - en particulier grâce à la loi des puissances des passées élémentaires dans une macro-couche.

On remarque que les expressions des demi-variogrammes seront exploitables si on en connaît au moins trois points.

13 - CARACTERISATION DE CE MODELE

Les principales caractéristiques de la série sédimentaire engendrée par ce modèle sont les suivantes :

- Si on calcule P/P' , qui donne le nombre moyen de passées élémentaires par macro-couche, on trouve $1+\alpha$ (que l'on a aussi par calcul direct à partir de la loi du nombre de passées élémentaires par macro-couche). Le nombre moyen de passées élémentaires, par macro-couche est donc faible : compris entre 1 et 2.

- La loi du nombre de passées élémentaires, par macro-couche est d'allure exponentielle décroissante :

$$p_n = u(1-u)^{n-1}$$

- La loi des puissances moyennes des passées élémentaires d'une macro-couche est également d'allure exponentielle.

- Le demi-variogramme des puissances des macro-couches et celui des puissances des passées élémentaires sont également d'allure exponentielle.

Les caractéristiques de ce modèle sont donc proches de celles de la série sédimentaire étudiée. On peut donc essayer de le lui appliquer.

14 - ESTIMATION DES PARAMETRES DU MODELE

On a vu que le modèle dépend de quatre paramètres γ , λ' , μ' et α et on dispose de six relations entre ces paramètres

- estimation de α

On calcule la valeur du rapport $\frac{P'^*}{P^*}$ et on trouve :

$$\frac{P'^*}{P^*} = 1 + \alpha \quad \text{or} \quad \frac{P^*}{P^*} = 1,48 \text{ donc} \quad \underline{\alpha^* = 0,48}$$
$$\text{Il s'en suit que} \quad \underline{\beta^* = 0,52}$$

- estimation de γ

On sait que l'on
$$P'^* = \frac{1}{\beta^* \gamma^*}$$

P étant la puissance moyenne d'une couche élémentaire

Il vient que
$$\underline{\gamma^* = 1,54}$$

On peut alors calculer la valeur de b à partir du demi-variogramme des macro-couches

$$b^* = \frac{\gamma^*(2) - \gamma^*(3)}{\gamma^*(1) - \gamma(1)} = 0,49$$

Or on a :

$$b^* = \frac{\lambda'^* - \alpha^*}{1 - \alpha^* \lambda^*} \quad \text{et il vient} \quad \underline{\lambda'^* = 0,78}$$
$$\text{qui donne pour } \lambda^* \quad \underline{\lambda^* = 0,58}$$

On sait que le moment d'ordre deux des puissances des couches élémentaires est :

$$Q_o^{*2} = \frac{2}{\beta^{*2} \gamma^{*2}} \frac{1 - 2\lambda^* + \mu^*}{(1 - \lambda^*)(1 - \mu^*)}$$

on a une estimation de $Q_o'^*$

$$Q_o'^* = P'^{*2} + \sigma^{*2} = 4,2$$

Il vient alors que :
$$\underline{\mu^* = 0,46}$$

qui donne
$$\underline{\mu'^* = 0,72}$$

n'est pas très différente de la loi engendrée par le modèle qui est :

$$p_1^* = 0.68$$

$$p_2^* = 0.21$$

$$p_3^* = 0.07$$

On note toutefois que le modèle ne permettra pas d'obtenir autant de couches élémentaires isolées qu'en comporte la réalité. Cela n'est pas gênant dans la mesure où on sait que les logs lithologiques sur lesquels les puissances des couches ont été relevées par mesure directe ne permettent pas de déceler des couches trop fines (pratiquement, on ne repère que les couches ayant une puissance d'au moins 20 cm) et même de discerner des couches fines de même faciès consécutives. Or, le modèle permet d'obtenir des couches élémentaires d'une puissance inférieure à 20 cm, il permet donc, dans une certaine mesure de "retrouver" les couches les plus fines en gardant les propriétés générales de la série sédimentaire.

15-2. Ensuite on peut calculer la profondeur moyenne après le dépôt d'une macro-couche.

On trouve :

$$E^*[Y^-] = 2,14 \text{ m}$$

ce qui, étant donnée la puissance moyenne d'une macro-couche (1.77 m), correspond à une profondeur de dépôt de l'ordre de 3 m, qui est parfaitement compatible avec les hypothèses génétiques de base.

On est donc assuré de la validité du modèle du moins quand à la représentation d'une série sédimentaire sur une verticale.

16 - SIMULATION DE CE MODELE (A UNE DIMENSION)

Le tableau 5 donne une partie d'une réalisation de série sédimentaire engendrée par ce modèle.

3.612	ARGILE	3.612	1
0.031	GRES	0.031	1
1.230	ARGILE		
0.886	ARGILE	2.166	2
2.554	GRES		
0.565	GRES	6.343	3
3.114	GRES	1.100	1
1.100	ARGILE	2.049	1
2.049	GRES		
0.005	ARGILE	9.875	3
0.008	ARGILE	0.075	1
9.810	ARGILE	0.668	1
0.075	GRES	0.308	1
0.668	ARGILE		
0.308	GRES	0.165	
0.165	ARGILE	3.374	
3.374	ARGILE	0.573	
0.573	ARGILE	4.112	3
0.506	GRES	0.506	1
0.002	ARGILE	0.002	1
0.004	GRES	0.084	1
0.085	ARGILE		
0.413	ARGILE	0.498	2
1.574	GRES	1.574	1
0.111	ARGILE	0.111	1
0.132	GRES		
2.359	GRES	2.491	2
1.800	ARGILE	1.800	1
0.001	GRES	0.001	1
0.450	ARGILE	0.450	1
0.085	GRES	0.085	1
2.819	ARGILE		
1.061	ARGILE	3.880	2
1.630	GRES		
2.515	GRES	4.145	2
1.764	ARGILE	1.764	1
0.364	GRES	0.364	1

On y lit :

- la puissance des couches élémentaires
- la nature de ces couches élémentaires
- la puissance des macro-couches
- le nombre de couches élémentaires par macro-couche

La série sédimentaire a été simulée pour 1.000 dépôts, effectifs ou non avec un taux de sédimentation ΔX suivant une loi gamma de paramètre 0,5 et d'indice 0,5.

On s'est placé en régime stationnaire dès le début du dépôt en prenant comme profondeur initiale la profondeur en régime stationnaire.

Il y a eut 551 dépôts effectifs de couches élémentaires pour 375 macro-couches.

La puissance moyenne des couches élémentaires est sur cette réalisation de 1,19 m et celle des macro-couches de 1,75 m.

69 % des macro-couches sont formées d'une seule couche élémentaire, 22 % de deux et 8 % de trois ; le nombre moyen de couche élémentaire par macro-couche étant de 1,47.

Ces caractéristiques de la série sédimentaire engendrée par le modèle, ou du moins d'une réalisation particulière sont donc très proches de celles de la série originale. On note toutefois, comme on le prévoyait que l'on obtient un certain nombre de couches élémentaires peu puissantes et moins de couches élémentaires isolées que n'en a la série sédimentaire réelle.

CONCLUSIONS

Au niveau de ce texte il apparaît que lors de l'application d'un modèle aléatoire-génétique à une structure réelle, deux difficultés se présentent, toutes deux liées aux hypothèses fondamentales de l'utilisation de ce type de modèle :

- La stationnarité du phénomène, nécessaire pour l'estimation des paramètres.

- La dépendance des puissances des couches successives - que l'on peut justement interpréter comme la conséquence de l'influence de la profondeur sur la puissance déposée, hypothèse qui est à la base des modèles introduits par G. MATHERON.

Lorsque l'on cherche si le phénomène est stationnaire, c'est-à-dire, en termes physiques, s'il est homogène dans une zone bien définie de l'espace, on n'en étudie en fait qu'une caractéristique bien particulière : ici la puissance des couches successives. Si on conclut à l'homogénéité de la zone étudiée, cette propriété ne concerne bien sûr que la caractéristique étudiée et ne présage rien quand à la présence ou à l'absence de tendances pour d'autres paramètres (tels que perméabilité, porosité, proportion de tel ou tel constituant ...). Conclure à la stationnarité du phénomène, c'est essentiellement dire que les éventuelles tendances, pour le paramètre retenu, sont trop faibles pour avoir une influence réelle sur les propriétés physiques de la structure. Elle peut donc être étudiée à partir d'un processus stationnaire.

Il reste que pour estimer les caractéristiques, il faut éventuellement tenir compte de l'existence d'une tendance apparente. L'introduction de ce terme correcteur n'est admissible que si la dérive est faible, alors, l'estimation par moindres carrés qui en est donnée est sans doute assez bonne. Lorsque les termes correcteurs deviennent trop grands par rapport à la valeur corrigée, il y a lieu de les mettre en doute ; c'est en particulier ce qui se passe pour les points du variogramme correspondant à un pas grand (en fait, dans les exemples cités ici à partir d'un pas égal à 5 ou 6). Dans ce cas, les variances d'estimation sont très grandes et l'estimation est mauvaise.

L'importance du problème de l'indépendance des puissances des couches successives est lié au choix même de ce type de modèle. Si les couches ont des puissances indépendantes les unes des autres, l'hypothèse la plus simple n'est pas de dire que la profondeur le long d'une

verticale est un processus d'Ambarzoumian, même si des lois particulières pour les facteurs principaux conduisent à un variogramme plat. Les modèles aléatoires génétiques seront donc en fait utilisés pour représenter des processus de sédimentation à faible profondeur, par rapport aux puissances déposées, pour lesquels on conçoit parfaitement qu'il n'y a pas indépendance entre les couches successives : à une couche de forte puissance succèdera une couche plus fine et réciproquement. Malheureusement ce cas (couches épaisses par rapport à la profondeur de dépôt) correspond aux erreurs d'estimation les plus grandes. Il faut donc être très prudent lors de l'estimation des moments et des paramètres sous peine de commettre des erreurs qui peuvent être importantes. Toutes ces précautions étant prises, on a vu, sur l'exemple de CONTRES que l'on peut parfaitement, par l'utilisation d'un tel modèle, rendre compte de façon satisfaisante d'une série sédimentaire.

D'une façon plus générale, différents cas d'école et l'étude de la structure de CONTRES ont montré que le passage à plusieurs dimensions est possible. Une théorie de simulation conditionnelle à trois dimensions, c'est-à-dire tenant compte de la connaissance que l'on a de la structure sur un certain nombre de sondages a été mise au point : compte tenu du modèle choisi, on détermine l'aspect de la structure dans les zones non reconnues. Ce travail, déjà effectué sur CONTRES doit permettre, soit en calculant sur le modèle théorique un certain nombre de probabilités conditionnelles (par exemple : sachant que deux sondages rencontrent deux passées de même faciès, quelle est la probabilité pour que ces deux passées communiquent?), soit en utilisant une méthode de simulations, de faire des prévisions quantitatives sur la structure et sur son exploitation.

C'est dans cette direction que doivent maintenant s'orienter les recherches.

OUVRAGES CITES

1 - Statistiques

- [1] - D.R. COX et P.A.W. LEWIS - L'Analyse statistique des séries d'évènement - Traduit par J. LARRIEU (Dunod - 1969)
- [2] - J. MOTHES - Prévision et décision statistique dans l'entreprise (Dunod - 1968)
- [3] - F.S. SWED et C. EISENHART - Tables for testing Randomness of grouping in a sequence of alternatives (Annals of Mathematical Statistics - 1943)

2 - Généralités sur les modèles aléatoires génétiques

- [4] - G. MATHERON - Les processus d'Ambarzoumian et leur application en géologie (Fontainebleau 1969)
- [5] - J. JACOD et P. JOATHON - Use of Random Genetic Models in the study of Sedimentary processes (J. Int. ass. Mat. Geol. 3,3,1971)
- [6] - J. JACOD et P. JOATHON - Estimation des paramètres dans les Modèles Aléatoires génétiques représentant des processus de sédimentation (Revue de l'I.F.P. Octobre 1970)

3 - Etude complète d'une structure

- [7] - J. JACOD et P. JOATHON - Etude de la structure de CHEMERY (Rapport à l'Institut Français du Pétrole 1971)
- [8] J. JACOD et P. JOATHON - Un modèle aléatoire génétique et sa simulation conditionnelle (Fontainebleau Juin 1971 - Note intérieure)

4 - Etude géologique de la Structure de CONTRES

- [9] - C. BOIS - E. SAVOYAT - J. MALENFER - Stockage souterrain de Chemery - Structure de CONTRES - Etat des connaissances géologiques à la fin de 1968.

(I.F.P. Réf. 17029, Mai 1969)

BIBLIOGRAPHIE SUPPLEMENTAIRE

Les ouvrages et articles ci-dessus, bien que n'ayant pas été cités dans le texte peuvent y apporter des éclaircissements ou des compléments.

Pour la partie ayant trait aux fonctions aléatoires et aux erreurs d'estimations on pourra se reporter à :

- W. FELLER : An introduction to probability theory and its applications (Wiley and Sons)

et

- G. MATHERON - les variables régionalisées et leur estimation (Masson - 1965)

Des indications sur la stratigraphie, du point de vue géologique se trouvent dans :

- A. LOMBARD : La stratification - Révision, critique et essai de théorie générale (Ecl. Géol. Melv. 58, n° 1, p. 135-155 - 1965)

Différents exemples de modèles aléatoires génétiques traités en deux dimensions ont été publiés au Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau :

- J. JACOD et P. JOATHON :
 - Etude d'un modèle de sédimentation turbidique (1969)
 - Quelques modèles aléatoires génétiques pour les processus de sédimentation cyclique (1970)
- P. JOATHON :
 - Sur un modèle, non stationnaire dans l'espace, de sédimentation turbidique (1970)
 - Etude d'un modèle de Silts à deux dimensions (1970)

Une présentation assez complète des méthodes classiques de géologie mathématique se trouve dans :

- J.W. MARBAUGH et G. BONHAM - CARTER Computer simulation in Geology (J.Wiley and Sons - 1970)

et une revue critique des différents types de modèles est faite dans :

- W.C. KRUMBEIN et M.F. DACEY : Markov chains and embedded Markov chains in geology (J. Int. Ass. Math. Geology 1 1 p. 79-96 - 1969)

Différents types de modèles sont présentés dans :

Modèles déterministes :

- G.F. BOMHAN CARTER et A.J. SUTHERLAND : Mathematical model and Fortran IV program for computer simulation of deltaic sedimentation (Computer contribution 24 - LAWRENCE - KANSAS - 1968)

Modèles déterministes avec erreur :

- F.P. AGTERBERG et I. BARNEJEE - Stochastic model for the deposition of marves in glacial lake Barlow - Gibway, Ontario, Canada (Can. J. EARTH. Sci., 6, 4, p. 625-652 - 1969)

Modèles aléatoires descriptifs :

- W.C. KRUMBEIN - Fortran IV computer program for Markov chain experiment in geology (Computer Cent. 13 - Lawrence - Kansas - 1967)
- W. SCHWARZACHER - The use of Markov chains in the study of sedimentary cycle (J. Int. Ass. Math. Geol. 1 1 p. 17-41 - 1969)

Modèles aléatoires faisant intervenir des hypothèses génétiques :

- W.C. KRUMBEIN - Fortran IV computer program for simulation of transgression and regression with continuous - time Markov models (Comp. Cont. 26 LAWRENCE - KANSAS (1968)

Analyse complète d'une structure sur une verticale :

- R.A. REYMEND et J.D. COLLINSON - Periodicity in Namurian sediments of Derbyshire, England (A quantitative sedimentary Analysis) (Sediment. Geol. 5 (1971) 23-36)

